MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU
STRUČNI STUDIJ RAČUNARSTVO

TIBOR NEMET

PRAVILNI MNOGOKUTI I DIJAGONALE

ZAVRŠNI RAD

ČAKOVEC, 2019.

MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU
STRUČNI STUDIJ RAČUNARSTVO

TIBOR NEMET

PRAVILNI MNOGOKUTI I DIJAGONALE
REGULAR POLYGONS AND DIAGONALS

ZAVRŠNI RAD

Mentor:
Tibor Rodiger, prof.

ČAKOVEC, 2019.

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentoru za smjernice i pomoć tijekom izrade završnog rada.

Tibor Nemet

SAŽETAK

Završni rad obuhvaća geometrijsko područje mnogokuta. U radu je detaljno razrađena tema pravilnih mnogokuta te njihovih dijagonala. Mnogokuti su na koje se rad koncentrira šesterokut, sedmerokut, osmerokut i deveterokut. Za svaki se od njih razrađuju njihovi vrhovi, stranice te vanjski i unutarnji kutovi. Svaki element te brojčani izračun dokazan je i matematičkom formulom. Svaki je mnogokut prikazan slikom. Dijagonale mnogokuta također su jedna od glavnih tema o kojoj ovaj rad govori. Za svaki mnogokut definiran je broj dijagonala iz jednog vrha te ukupan zbroj svih dijagonala. Svaki izračun za dijagonale dokazan je matematičkom formulom. Također prikazana je najčešća greška koja se događa kod izračuna ukupnog broja dijagonala.

Ključne riječi: *pravilni mnogokut, dijagonala, sjecišta dijagonala, regije pravilnog mnogokuta*

SADRŽAJ

1. Uvod

Riječ mnogokut dolazi od grčke riječi *poly*, što znači mnogo te *gon*, što znači kut. Počeci mnogokuta sežu u davnu prošlost. Postoji nekoliko vrsta mnogokuta, a to su pravilni, nepravilni, konveksni i konkavni. Pravilni je mnogokut onaj koji ima sve stranice jednake duljine i sve unutarnje kutove jednake veličine. U svakome je mnogokutu broj vrhova i stranica jednak. Dijagonala mnogokuta spaja dva nasuprotna vrha. Dijagonale mnogokuta dijele se na duge, srednje i kratke. Dijagonale unutar mnogokuta dijele mnogokut na regije. Sjecište dijagonala mjesto je unutar mnogokuta gdje se dvije ili više dijagonala sijeku.Unutar pravilnog neparnog mnogokuta u jednoj točki nikad se ne susreće više od dvije dijagonale. U neparnom pravilnom mnogokutu dijagonale se nikad ne sijeku u sredini. Spajanjem vrhova unutar mnogokuta nastaju zvjezdasti mnogokuti, neki od njih su simboli raznih religija (pentagram, heksagram).

2. Pravilni mnogokut

DEFINICIJA 1. Mnogokut je dio ravnine omeđen dužinama. Mnogokut je dvodimenzionalan lik s tri ili više stranica.

DEFINICIJA 2. Pravilni mnogokut je onaj koji ima sve stranice jednake duljine i sve unutarnje kutove jednake veličine.

DEFINICIJA 3. Dijagonala mnogokuta je dužina koja spaja dva nasuprotna vrha.

2.1 Svojstva pravilnih mnogokuta

Broj dijagonala iz jednog vrha:

$$d_1 = n - 3$$

DOKAZ: Iz jednog vrha dijagonalu je nemoguće povući u dva susjedna vrha te u vrh iz kojeg se crta dijagonala. Zato da bi se dobio ukupan broj dijagonala iz jednog vrha ukupan broj vrhova treba oduzeti s tri.

Ukupan broj dijagonala pravilnog mnogokuta:

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

DOKAZ: Broj dijagonala iz jednog vrha iznosi n – 3. Pravilni mnogokut ima n vrhova. Svaka dijagonala ima dva kraja, pa se izraz zato dijeli s dva.

Zbroj kutova u pravilnom mnogokutu:

$$S_n = 180° \cdot (n - 2)$$

DOKAZ: Dijagonale iz jednog vrha mnogokuta dijele mnogokut na $n - 2$ trokuta. Zbroj kuteva unutar trokuta iznosi 180°

Veličina unutrašnjeg kuta pravilnog mnogokuta:

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

DOKAZ: Iznos jednog kuta unutar mnogokuta dobi se tako da se ukupan zbroj kutova podijeli s brojem vrhova.

Veličina vanjskog kuta pravilnog mnogokuta:

$$\beta_n = 180° - \alpha_n$$

DOKAZ: Vanjski kut je kut između bilo koje stranice mnogokuta i produžene linije. Kut na produženoj liniji uvijek iznosi 180°. Tako da se od 180° samo treba oduzeti iznos unutarnjeg kuta.

2.2 Primjeri pravilnih mnogokuta

Primjer 1. Pravilni šesterokut:

Veličina unutrašnjeg kuta pravilnog šesterokuta:

$$\alpha_6 = \frac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 120°$$

Veličina vanjskog kuta pravilnog šesterokuta:

$$\beta_6 = 180° - 120° = 60°$$

Zbroj kutova u pravilnom šesterokutu:

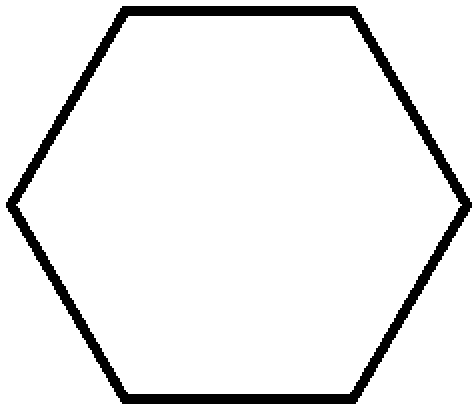
$$S_6 = 180° \cdot (6 - 2) = 720°$$

Ukupan broj dijagonala pravilnog šesterokuta:

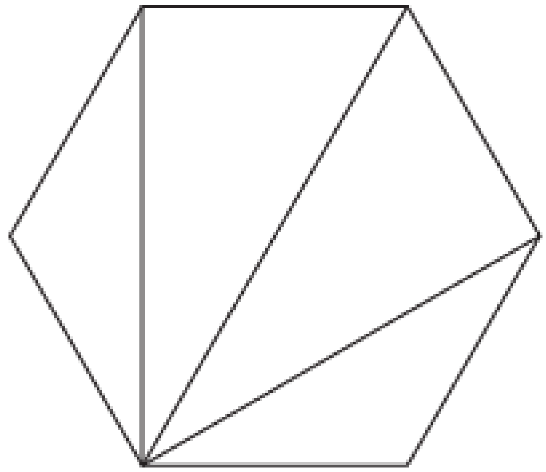
$$D_6 = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$$

Broj dijagonala iz jednog vrha šesterokuta:

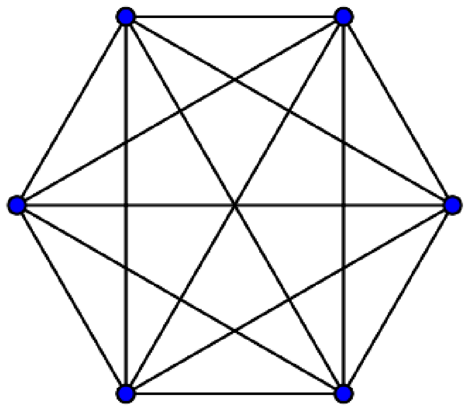
$$d_1 = 6 - 3 = 3$$



Slika1. Pravilni šesterokut [1]



Slika2. Dijagonale iz jednog vrha[2]



Slika 3. Sve dijagonale pravilnog šesterokuta [3]

Primjer 2. Pravilni sedmerokut:

Veličina unutrašnjeg kuta pravilnog sedmerokuta:

$$\alpha_7 = \frac{(7-2)\cdot 180°}{7} = 128.5°$$

Veličina vanjskog kuta pravilnog sedmerokuta:

$$\beta_7 = 180° - 128.5° = 51.5°$$

Zbroj kutova u pravilnom sedmerokutu:

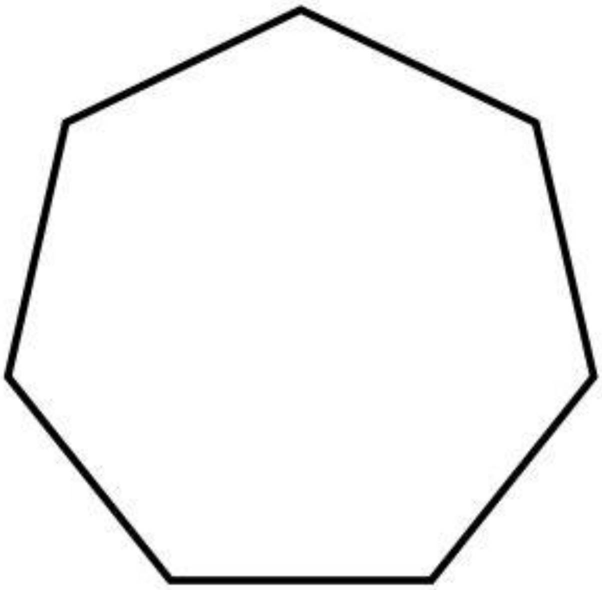
$$S_7 = 180° \cdot (7-2) = 900°$$

Ukupan broj dijagonala pravilnog sedmerokuta:

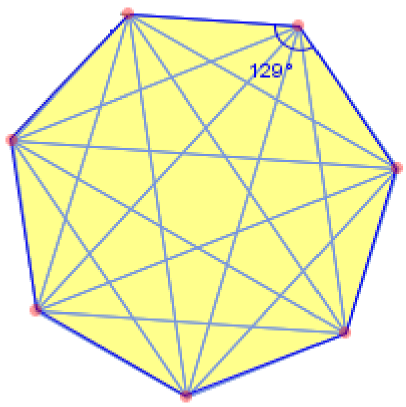
$$D_7 = \frac{7\cdot(7-3)}{2} = 14$$

Broj dijagonala iz jednog vrha sedmerokuta:

$$d_1 = 7 - 3 = 4$$



Slika 4. Pravilni sedmerokut [4]



Slika 5. Dijagonale pravilnoga sedmerokuta [5]

Primjer 3. Pravilni osmerokut:

Veličina unutrašnjeg kuta pravilnog osmerokuta:

$$\alpha_8 = \frac{(8-2)\cdot 180°}{8} = 135°$$

Veličina vanjskog kuta pravilnog osmerokuta:

$$\beta_8 = 180° - \ 135° = 45°$$

Zbroj kutova u pravilnom osmerokutu:

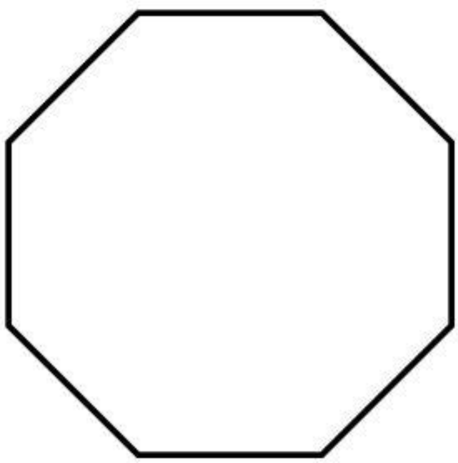
$$S_8 = 180° \cdot (8 - 2) = \ 1080°$$

Ukupan broj dijagonala pravilnog osmerokuta:

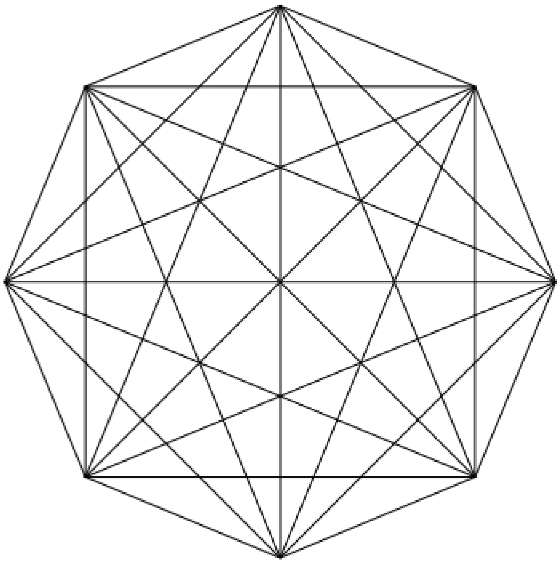
$$D_8 = \ \frac{8 \cdot (8-3)}{2} = 20$$

Broj dijagonala iz jednog vrha osmerokuta:

$$d_1 = 8 - 3 = 5$$



Slika 6. Pravilni osmerokut[6]



Slika 7. Dijagonale pravilnog osmerokuta[7]

Primjer 4. Pravilni deveterokut:

Veličina unutrašnjeg kuta pravilnog deveterokuta:

$$\alpha_9 = \frac{(9-2)\cdot 180°}{9} = 140$$

Veličina vanjskog kuta pravilnog deveterokuta:

$$\beta_9 = 180° - 140° = 40°$$

Zbroj kutova u pravilnom deveterokutu:

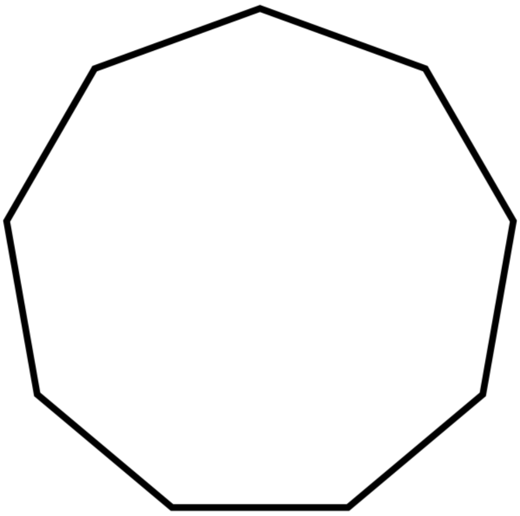
$$S_9 = 180° \cdot (9-2) = 1260°$$

Ukupan broj dijagonala pravilnog deveterokuta:

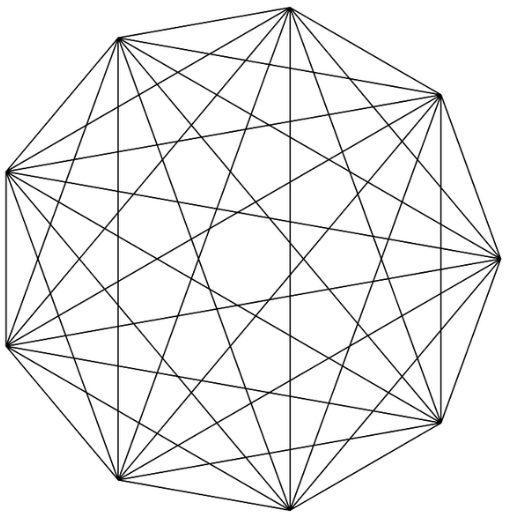
$$D_9 = \frac{9\cdot(9-3)}{2} = 27$$

Broj dijagonala iz jednog vrha deveterokuta:

$$d_1 = 9 - 3 = 6$$



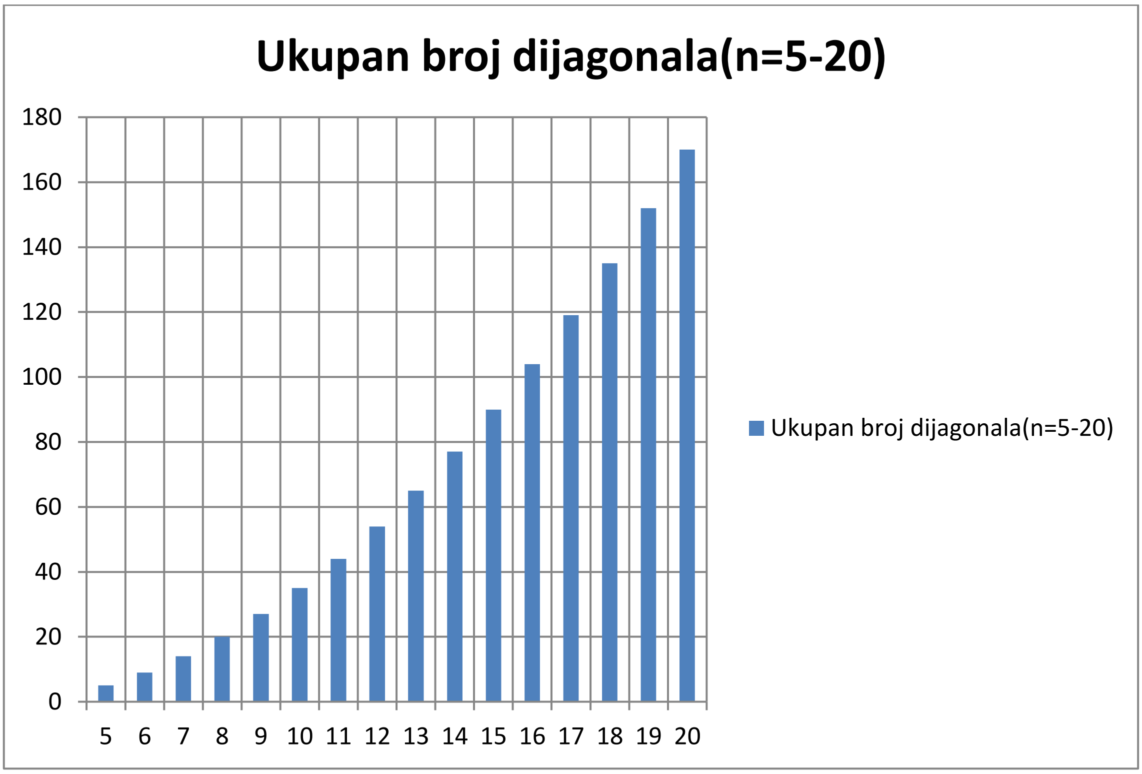
Slika 8. Pravilni deveterokut[8]



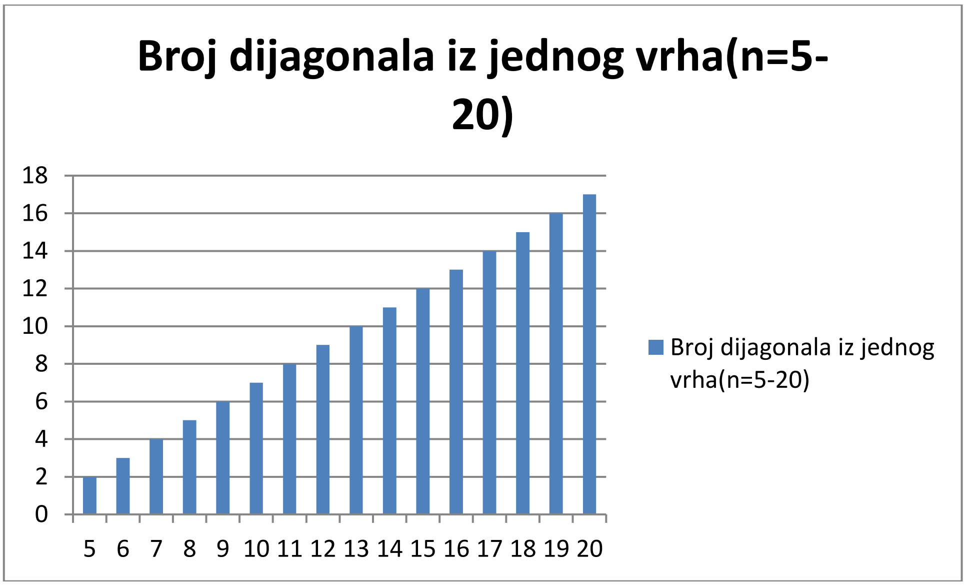
Slika 9. Dijagonale pravilnog deveterokuta[9]

Broj kutova	Unutarnji kut	Zbroj kutova	Vanjski kut	Broj dijagonala(jedan vrh)	Ukupan broj dijagonala
5	108,00	540	72,00	2	5
6	120,00	720	60,00	3	9
7	128,57	900	51,43	4	14
8	135,00	1080	45,00	5	20
9	140,00	1260	40,00	6	27
10	144,00	1440	36,00	7	35
11	147,27	1620	32,73	8	44
12	150,00	1800	30,00	9	54
13	152,31	1980	27,69	10	65
14	154,29	2160	25,71	11	77
15	156,00	2340	24,00	12	90
16	157,50	2520	22,50	13	104
17	158,82	2700	21,18	14	119
18	160,00	2880	20,00	15	135
19	161,05	3060	18,95	16	152
20	162,00	3240	18,00	17	170

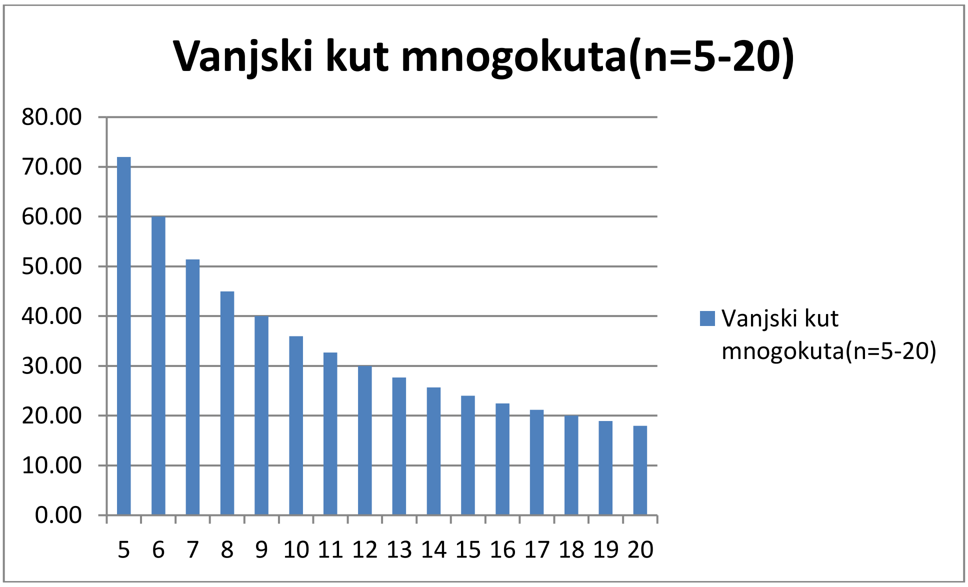
Tablica1.Prikaz podataka mnogokuta[1]



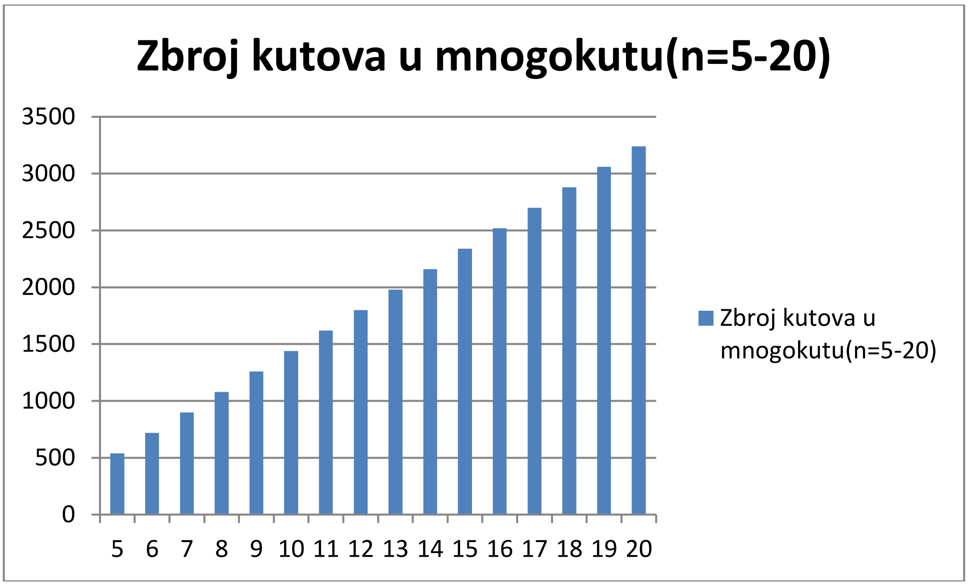
Grafikon1. Prikaz broja dijagonala u odnosu na broj kutova[1]



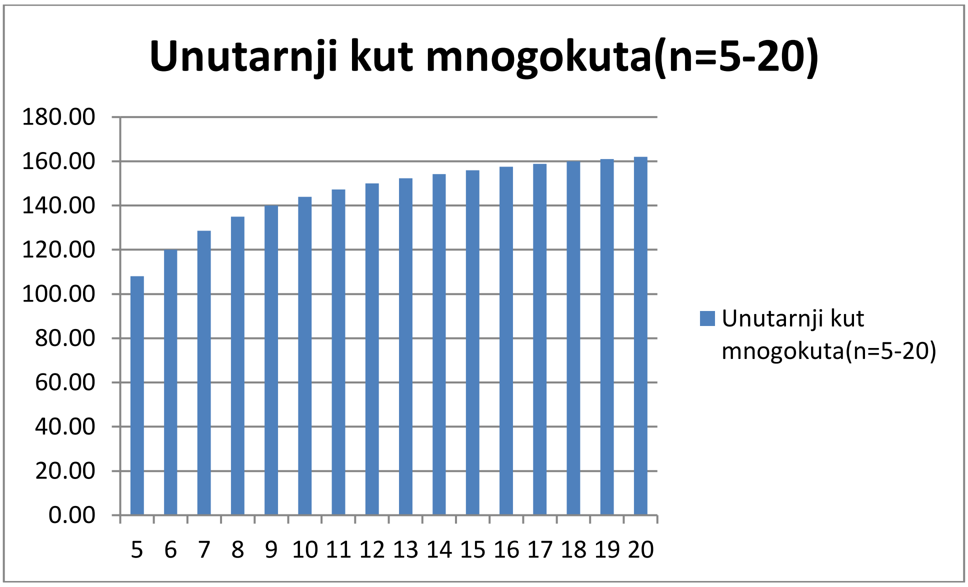
Grafikon2. Prikaz broja dijagonala iz jednog vrha[2]



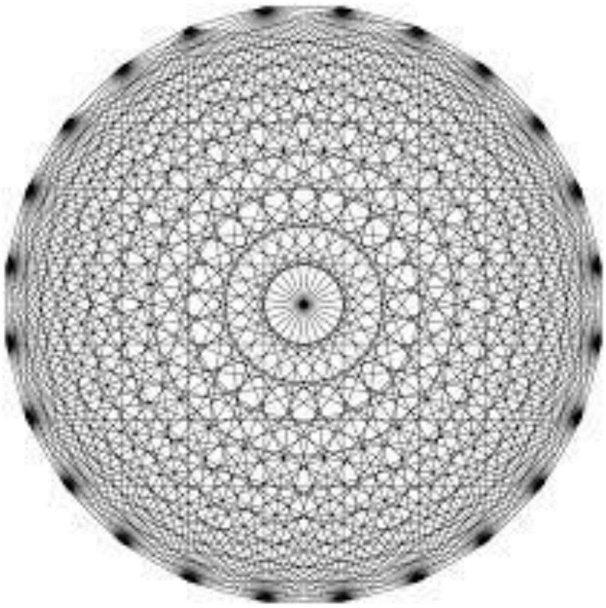
Grafikon3. Prikaz vanjskog kuta mnogokuta[3]



Grafikon4. Prikaz zbroja kutova u mnogokutu[4]



Grafikon5. Prikaz unutarnjeg kuta mnogokuta[5]



Slika 10. Dijagonale pravilnog trideseterokuta[10]

3. Sjecišta dijagonala pravilnog mnogokuta

Formula broja sjecišta dijagonala I(n) za neparne pravilne mnogokute je $\binom{n}{4}$. I(n) za parne pravilne mnogokute može biti manji zato što se u mnogokutu može dogoditi da se tri ili više dijagonale sijeku u jednoj točki te da se neka od $\binom{n}{4}$ sjecišta podudaraju.(Poonen i Rubinstein, 1998). Najveći broj dijagonala za pravilni mnogokut n > 4 koje se sijeku u istoj točki osim centra je:

2 ako je *n* neparan

3 ako je *n* paran, ali nije djeljiv sa 6

5 ako je *n* djeljiv sa 6, ali ne s 30

7 ako je *n* djeljiv s 30,

iznimke ako je n=6, onda je najveći mogući broj 2 i ako n=12, onda je najveći mogući broj četiri (Poonen i Rubinstein 1998).

Teorem za izračun broja sjecišta dijagonala unutar pravilnog mnogokuta:

$$I(n) = \binom{n}{4} + \frac{-5n^3 + 45n^2 - 70n + 24}{24} \cdot \delta_2(n) - \binom{\frac{3n}{2}} \cdot \delta_4(n)$$
$$+ \frac{-45n^2 + 262n}{6} \cdot \delta_6(n) + 42n \cdot \delta_{12}(n) + 60n \cdot \delta_{18}(n)$$
$$+ 35n \cdot \delta_{24}(n) - 38n \cdot \delta_{30}(n) - 82n \cdot \delta_{42}(n) - 330n \cdot \delta_{60}(n)$$
$$- 144n \cdot \delta_{84}(n) - 96n \cdot \delta_{90}(n) - 144n \cdot \delta_{120}(n) - 96n \cdot \delta_{210}(n)$$

Kada je n neparan broj tada vrijedi formula: $I(n) = \binom{n}{4}$

Unutar neparnog mnogokuta dijagonale se ne mogu sjeći više od 2 puta.

Primjer za deveterokut: $I(9) = \binom{9}{4}$

$$I(9) = 126$$

Primjer za osmerokut:

$$I(8) = \binom{8}{4} + \frac{-5 \cdot 8^3 + 45 \cdot 8^2 - 70 \cdot 8 + 24}{24} \cdot \delta_2(n) - \binom{\frac{3n}{2}} \cdot \delta_4(n)$$

$$I(8) = 70 + (-9) \cdot 1 - 12 * 1$$

$$I(8) = 49$$

Broj dobiveni ovim teoremom uračunava sjecište u sredini.

Zbroj sjecišta gdje se sijeku dvije dijagonale:

$$\frac{a_2(n)}{n} = \frac{n^3 - 6n^2 + 11n - 6}{24} + \frac{-5n^2 + 46n - 72}{16} \cdot \delta_2(n)$$
$$-\frac{9}{4} \cdot \delta_4(n) + \frac{-19n + 110}{2} \cdot \delta_6(n) + 54 \cdot \delta_{12}(n) + 84 \cdot \delta_{18}(n)$$
$$+ 50 \cdot \delta_{24}(n) - 24 \cdot \delta_{30}(n) - 100 \cdot \delta_{42}(n) - 432 \cdot \delta_{60}(n)$$
$$- 204 \cdot \delta_{84}(n) - 144 \cdot \delta_{90}(n) - 204 \cdot \delta_{120}(n) - 144 \cdot \delta_{210}(n)$$

Primjer za n = 30:

$$\frac{a_2(30)}{30} = \frac{30^3 - 6 \cdot 30^2 + 11 \cdot 30 - 6}{24} + \frac{-5 \cdot 30^2 + 46 \cdot 30 - 72}{16} \cdot 1$$
$$-\frac{9}{4} \cdot 0 + \frac{-19 \cdot 30 + 110}{2} \cdot 1 + 54 \cdot 0 + 84 \cdot 0$$
$$+ 50 \cdot 0 - 24 \cdot 1$$

$$\frac{a_2(30)}{30} = \frac{1827}{2} + \left(\frac{-399}{2}\right) - 230$$
$$a_2(30) = 13800$$

Zbroj sjecišta gdje se sijeku tri dijagonale:

$$\frac{a_3(n)}{n} = \frac{5n^2 - 48n + 76}{48} \cdot \delta_2(n) + \frac{3}{4} \cdot \delta_4(n) + \frac{7n - 38}{6} \cdot \delta_6(n)$$
$$- 8 \cdot \delta_{12}(n) - 20 \cdot \delta_{18}(n) - 16 \cdot \delta_{24}(n) - 19 \cdot \delta_{30}(n) + 8 \cdot \delta_{42}(n)$$
$$+ 68 \cdot \delta_{60}(n) + 60 \cdot \delta_{84}(n) + 48 \cdot \delta_{90}(n) + 60 \cdot \delta_{120}(n) + 48 \cdot \delta_{210}(n)$$

Primjer za n = 30:

$$\frac{a_3(30)}{30} = \frac{5 \cdot 30^2 - 48 \cdot 30 + 76}{48} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{7 \cdot 30 - 38}{6} \cdot 1$$
$$- 8 \cdot 0 - 20 \cdot 0 - 16 \cdot 0 - 19 \cdot 1$$
$$\frac{a_3(30)}{30} = \frac{196}{3} + \frac{86}{3} - 19$$
$$a_3(30) = 2250$$

Zbroj sjecišta gdje se sijeku četiri dijagonale:

$$\frac{a_4(n)}{n} = \frac{7n-42}{12} \cdot \delta_6(n) - \frac{5}{2} \cdot \delta_{12}(n) - 4 \cdot \delta_{18}(n) + 3 \cdot \delta_{24}(n) + 6 \cdot \delta_{42}(n) + 34 \cdot \delta_{60}(n) - 6 \cdot \delta_{84}(n) - 6 \cdot \delta_{120}(n)$$

Primjer za n = 30:

$$\frac{a_4(30)}{30} = \frac{7 \cdot 30 - 42}{12} \cdot 1$$

$$a_4(30) = 420$$

Zbroj sjecišta gdje se sijeku pet dijagonala:

$$\frac{a_5(n)}{n} = \frac{n-6}{4} \cdot \delta_6(n) - \frac{3}{2} \cdot \delta_{12}(n) - 2 \cdot \delta_{24}(n) + 4 \cdot \delta_{42}(n) + 6 \cdot \delta_{84}(n) + 6 \cdot \delta_{120}(n)$$

Primjer za n = 30:

$$\frac{a_5(30)}{30} = \frac{30-6}{4} \cdot 1$$

$$a_5(30) = 180$$

Zbroj sjecišta gdje se sijeku šest dijagonala:

$$\frac{a_6(n)}{n} = 4 \cdot \delta_{30}(n) - 4 \cdot \delta_{60}(n)$$

Primjer za n = 30:

$$\frac{a_6(30)}{30} = 4 \cdot 1 - 0$$

$$a_6(30) = 120$$

Zbroj sjecišta gdje se sijeku sedam dijagonala:

$$\frac{a_7(n)}{n} = \delta_{30}(n) + 4 \cdot \delta_{60}(n)$$

Primjer za n = 30:

$$\frac{a_7(30)}{30} = 1 + 0$$

$$a_7(30) = 30$$

4. Broj regija mnogokuta

Kod dijagonala mnogokuta zanimljivo je promatrati na koliko ukupno dijelova dijagonale dijele mnogokut. Formula za broj regija razlikuje se za parne i neparne mnogokute. Kod svih parnih mnogokuta dijagonale se dijele i u sredini mnogokuta.

Dodavanjem Eulerove formule i analizom prvog teorema za izračun broja sjecišta dijagonala doći ćemo do formule za izračun R(n) regija mnogokuta. (Poonen i Rubinstein 1998).

Eulerova formula: V – E + F = 2

V predstavlja broj vrhova nekog tijela npr.kocke. F predstavlja broj ploha nekog tijela. Broj E predstavlja broj linija koje spajaju dva vrha. Svi ti broevi zajedno iznose 2.

Npr. Eulerova formula za kocku:$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$

Teorem broj dva za izračun regija mnogokuta:

$$R(n) = \frac{(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24)}{24}$$
$$+\frac{-5n^3 + 42n^2 - 40n - 48}{48} \cdot \delta_2(n) - (3n/4) \cdot \delta_4(n)$$
$$+\frac{-53n^2 + 310n}{12} \cdot \delta_6(n) + (49n/2) \cdot \delta_{12}(n) + 32n \cdot \delta_{18}(n)$$
$$+ 19n \cdot \delta_{24}(n) - 36n \cdot \delta_{30}(n) - 50n \cdot \delta_{42}(n) - 190n \cdot \delta_{60}(n)$$
$$- 78n \cdot \delta_{84}(n) - 48n \cdot \delta_{90}(n) - 78n \cdot \delta_{120}(n) - 48n \cdot \delta_{120}(n)$$

Primjer za deseterokut:

$$R(10) = \frac{(10^4 - 6 \cdot 10^3 + 23 \cdot 10^2 - 42 \cdot 10 + 24)}{24}$$
$$+\frac{-5 \cdot 10^3 + 42 \cdot 10^2 - 40 \cdot 10 - 48}{48} \cdot 1$$
$$R(10) = 246 + (-26) = 220$$

Ovdje vrijedi pravilo $\delta_m(n) = 1$ ako je n višekratnik broja m. Ako nije višekratnik onda je $\delta_m(n) = 0$ tako da ovdje ostatak jednadžbe otpada.
Broj regija unutar deseterokuta iznosi 220

Ako je broj vrhova mnogokuta neparan, formula za izračun broja regija iznosi:

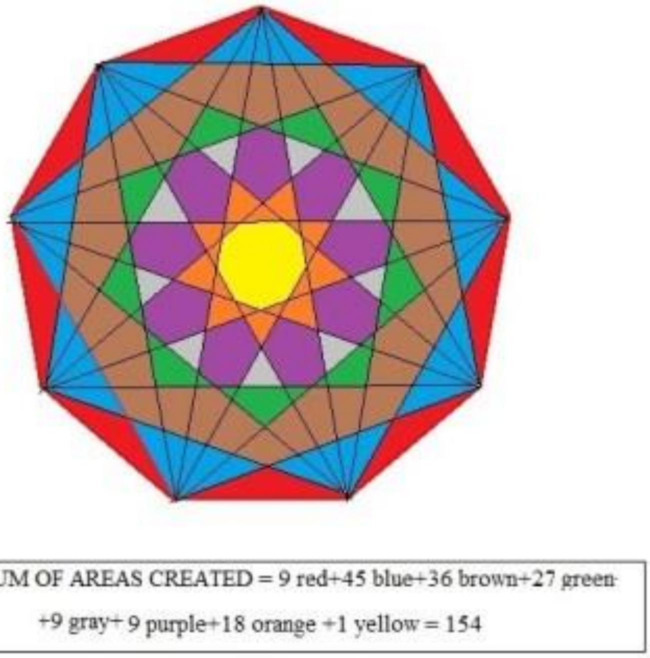
$$R(n) = \frac{(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24)}{24}$$

Primjer za deveterokut:

$$R(9) = \frac{(9^4 - 6 \cdot 9 + 23 \cdot 9^2 - 42 \cdot 9 + 24)}{24}$$

$$R(9) = 154$$

Broj regija unutar deveterokuta iznosi 154.



Slika 11. Prikaz 154 regije deveterokuta[11]

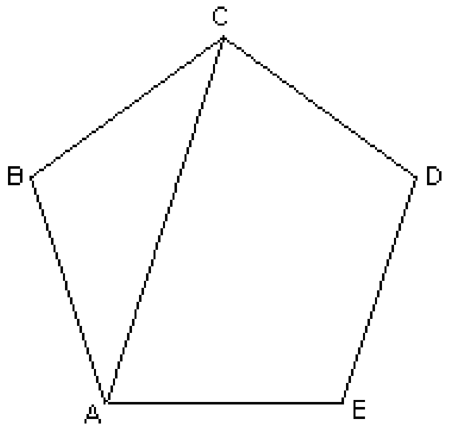
n	a2(n)	a3(n)	a4(n)	a5(n)	a6(n)	a7(n)	I(n)	R(n)
5	5						5	11
6	12						13	24
7	35						35	50
8	40	8					49	80
9	126						126	154
10	140	20					161	220
11	330						330	375
12	228	60	12				301	444
13	715						715	781
14	644	112					757	952
15	1365						1365	1456
16	1168	208					1377	1696
17	2380						2380	2500
18	1512	216	54	54			1837	2466
19	3876						3876	4029
20	3360	480					3841	4500
21	5985						5985	6175
22	5280	660					5941	6820
23	8855						8855	9086
24	6144	864	264	24			7297	9024
25	12650						12650	12926
26	11284	1196					12481	13988
27	17550						17550	17875
28	15680	1568					17249	19180
29	23751						23751	24129
30	13800	2250	420	180	120	30	16801	21480

Tablica2.Izračuni za mnogokute s 5 – 30 vrhova[2]

5. Najkraća i najdulja dijagonala pravilnog mnogokuta

5.1. Peterokut

Kod peterokuta postoji samo jedna vrsta dijagonala, zato što kod peterokuta svaka dijagonala spaja svaki drugi vrh s jednim vrhom između.



Slika 12. Dijagonala peterokuta[12]

Za izračunati duljinu dijagonale peterokuta potrebana nam je samo duljina stranice šesterokuta . Peterokut ima 5 jednakih dijagonala koje oblikuju pentagram

Formula za izračun duljine dijagonale peterokuta:

$$d = a \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

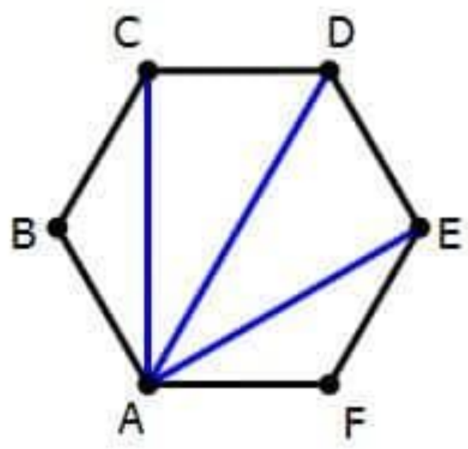
Primjer kada je duljina stranice 10cm:

$$d = 10 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$d = 16.18\ cm$$

5.2. Šesterokut

Za izračunati najkraću dijagonalu šesterokuta potrebno je znati nekoliko podataka. Zbroj kutova u mnogokutu se dobiva prema formuli 180(n-2). Iznos unutarnjeg kuta u pravilnome mnogokutu iznosi $\frac{180(n-2)}{n}$.



Slika 13. Najkraća dijagonala šesterokuta[13]

Na šesterokutu najkraće dijagonale iz vrha A su 'AC' i 'AE'. U svih pravilnim mnogokutima najkraća dijagonala čini stranicu jednog jednakokračnog trokuta. Jedan od načina za izračunati najkraću dijagonalu šesterokuta je uz pomoć jednakokračnog trokuta. Ukupan broj dijagonala u pravilnome šesterokutu iznosi 9. Tri od devet dijagonala zovu se "duge" dijagonale. Duge dijagonale su dijagonale koje prolaze kroz središte šesterokuta. Duljina dugih dijagonala jednaka je promjeru kružnice koju opisuje šesterokut. Ostale dijagonale zovu se "kratke" dijagonale . Kratke dijagonale ne prolaze središtem mnogokuta, već spajaju dva vrha s točno jednim vrhom između njih.

Formula za dugu dijagonalu šesterokuta:

$$D = 2 \cdot a$$

Primjer kada je duljina stranice 10cm:

$$D = 2 \cdot 10$$

$$D = 20\ cm$$

Formula za kratku dijagonalu šesterokuta:

$$d = \sqrt{3} \cdot a$$

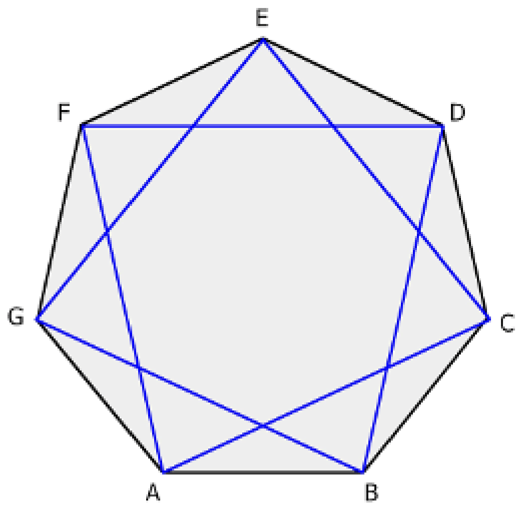
Primjer kada je duljina stranice 10cm:

$$d = \sqrt{3} \cdot 10$$

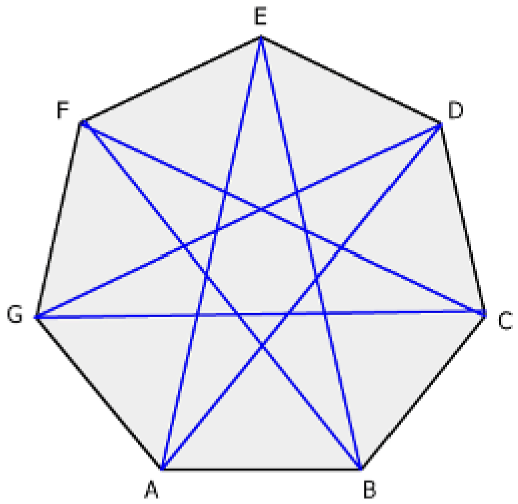
$$d = 17.32\ cm$$

5.3 Sedmerokut

Sedmerokut ima dvije vrste dijagonala: dugu i kratku, ali nijedna ne prolazi kroz središte sedmerokuta, zato jer je sedmerokut neparni pravilni mnogokut. Kratke dijagonale unutar sedmerokuta spajaju svaki drugi vrh. Duge dijagonale spajaju svaki treći vrh.



Slika 14. Kratke dijagonale sedmerokuta[14]



Slika 15. Duge dijagonale sedmerokuta[15]

Formula za dugu dijagonalu sedmerokuta:

$$d = a/(2 \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{7}\right))$$

Primjer kada je duljina stranice 10cm:

$$d = 10/(2 \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{7}\right))$$

$$d = 22.47\ cm$$

Formula za kratku dijagonalu sedmerokuta:

$$e = 2 \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{7})$$

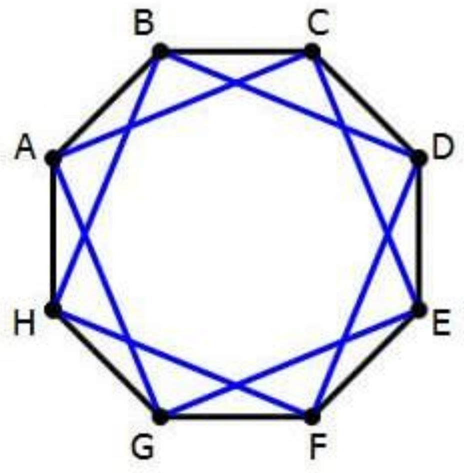
Primjer kada je duljina stranice 10cm:

$$e = 2 \cdot 10 \cdot \cos(\frac{\pi}{7})$$

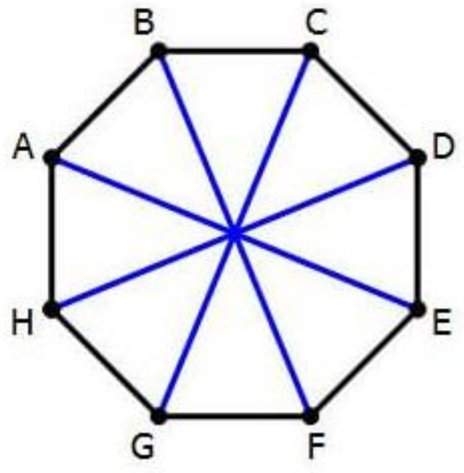
$$e = 18.02\ cm$$

5.4. Osmerokut

Osmerokut ima tri vrste dijagonala, to su duga dijagonala, srednja dijagonala i kratka dijagonala. Duga dijagonala spaja svaki četvrti kut i prolazi središtem osmerokuta. Srednja dijagonala spaja svaki treći kut, a kratka dijagonala spaja svaki drugi kut.



Slika 16. Kratke dijagonale osmerokuta[16]



Slika 17. Duge dijagonale osmerokuta[17]

Formula za dugu dijagonalu osmerokuta:

$$d = a \cdot \sqrt{4 + 2 * \sqrt{2}}$$

Primjer kada je duljina stranice 10cm:

$$d = 10 \cdot \sqrt{4 + 2 * \sqrt{2}}$$

$$d = 26.13\ cm$$

Formula za srednju dijagonalu osmerokuta:

$$e = a \cdot (1 + \sqrt{2})$$

Primjer kada je duljina stranice 10cm:

$$e = 10 \cdot (1 + \sqrt{2})$$

$$e = 24.14\ cm$$

Formula za kratku dijagonalu osmerokuta:

$$f = a \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Primjer kada je duljina stranice 10cm:

$$f = 10 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$f = 18.47\ cm$$

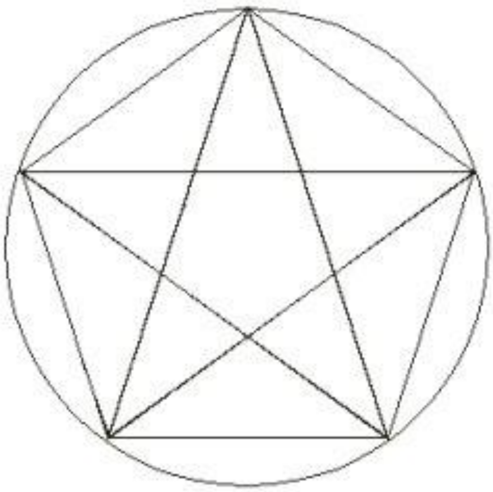
6. Zvjezdasti mnogokuti

Zvjezdasti mnogokut je mnogokut koji se dobije spajanjem vrhova unutar pravilnog mnogokuta. Prve osobe koje su se u matematici bavile pojmom zvjezdastih mnogokuta Thomas Bradwardine i Johannes Kepler. I Bradwardine i Kepler zvjezdaste su mnogokute definirali pomoću pravilnih mnogokuta. Zvjezdasti mnogokut definiraju dva pozitivna cijela broja: p i q. *p* predstavlja broj točaka koje su jednako raspoređene na kružnici. Broj *q* predstavlja gustoću mnogokuta.

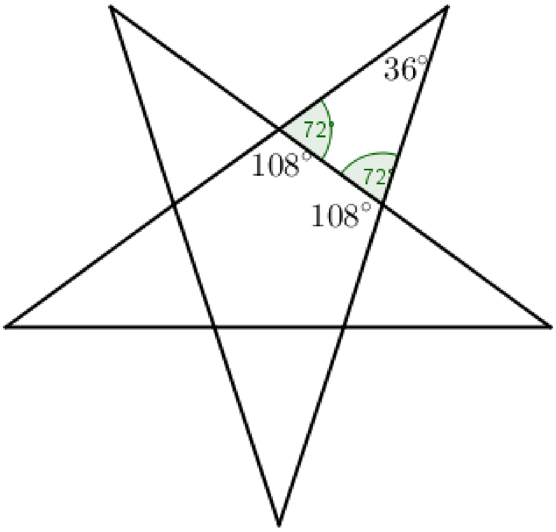
Primjer 1. p=7 q=2, onda se kod crtanja zvjezdastog sedmerokuta spaja svaki drugi vrh unutar pravilnog sedmerokuta.

6.1 Zvjezdasti mnogokut {5,2}

U povijesti, još od Pitagorina vremena, pentagram je bio prezentiran kao izvor mistične energije. Danas se pentagram koristi kao simbol u mnogim religijskim pokretima. Zbog jednakih duljina stranica pentagram je pravilni zvjezdasti mnogokut. Pentagram je zvjezdasti mnogokut {5,2}. Unutar pentagrama nalazi se deset jednakokračnih trokuta, od kojih je pet trokuta sa svim kutevima manjima od 90°, a pet ih je s jednim kutom većim od 90°.



Slika 18. Zvjezdasti mnogokut{5,2}[18]

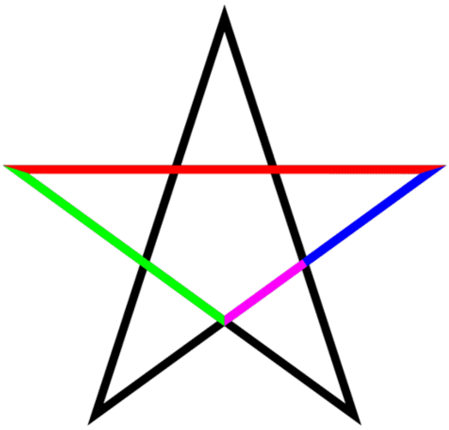


Slika 19. Kutevi zvjezdastog mnogokuta{5,2}[19]

Zlatni rez **Definicija**: zlatni rez je posebni broj koji se dobije kada se linija podjeli na dva dijela, s time da se duži dio podijeljen kraćim dijelom odnosi jednako kao zbroj dužeg i kraćeg dijela podijeljen dužim dijelom.

Omjer dužih i kraćih stranica unutar pentagrama iznosi otprilike 1.618:1, što se u matematici naziva zlatni rez (engl. *golden ratio.)* Zlatni rez je postignut kada je omjer veće stranice i manje stranice jednak omjeru zbroja veće stranice, kraće stranice i veće stranice:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

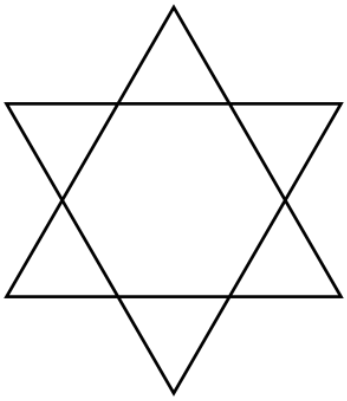


Slika 20. Zlatni rez[20]

Na slici iznad obojana su četiri segmenta pentagrama koji su međusobno u odnosu zlatnog reza. Crvena linija je 1.618 puta duža od zelene linije. Zelena linija je 1.618 puta duža od plave linije. Plava linije je 1.618 puta duža od ljubičaste linije.

6.2 Zvjezdasti mnogokut {6,2}

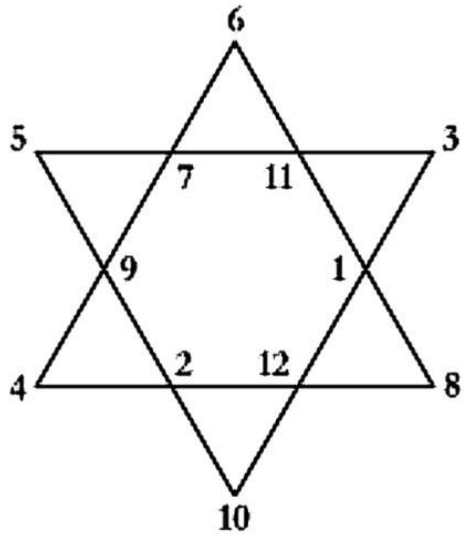
Heksagram je zvjezdasti mnogokut {6/2}. Heksagram je još poznatiji pod imenom Davidova zvijezda, koja je danas širom svijeta prepoznata kao simbol židovske vjere. Davidova zvijezda danas ima razna značenja, no najčešće se povezuje s brojem sedam.Svako od tih tumačenja referira se na šest vrhova zvijezde plus sredina heksagrama.



Slika 21. Zvjezdasti mnogokut{6,2}[21]

6.3 Magični zvjezdasti mnogokut {6,2}

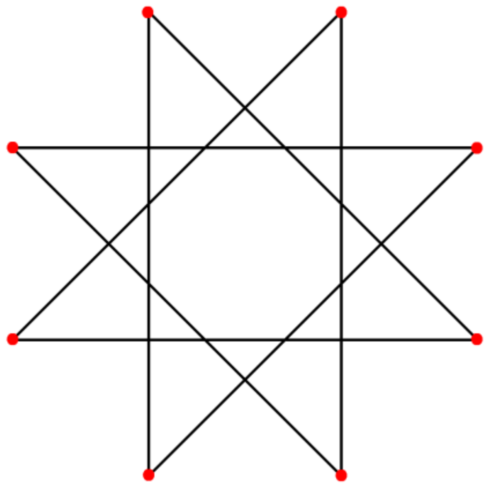
Ovaj heksagram dobio je ime „magični“ zbog toga što je zbroj brojeva koji su postavljeni na vrhove i sjecišta heksagrama uvijek jednak. Konkretno, radi se u zbroju četiriju brojeva na jednakom pravcu, npr. 5+9+2+10=26. Broj 26 naziva se magičnom konstantom, koja se dobiva prema formuli $M = 4n + 2$, gdje n predstavlja broj vrhova zvjezdastog mnogokuta.



Slika 22. Magični zvjezdasti mnogokut{6,2}[22]

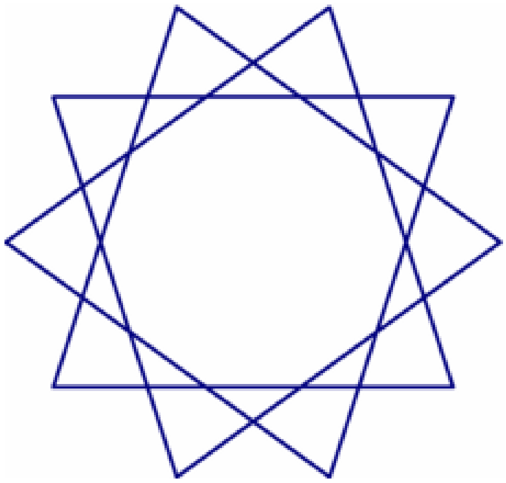
6.4 Posebni zvjezdasti mnogokuti

Oktagram je zvjezdasti mnogokut{8,3}.



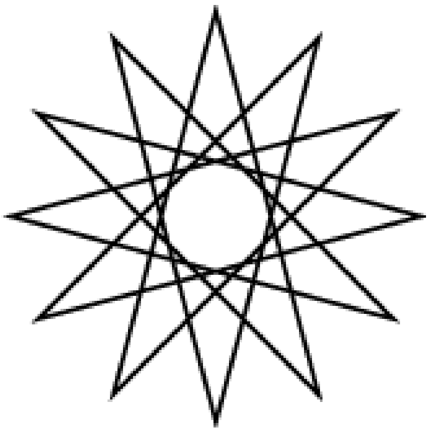
Slika 23. Zvjezdasti mnogokut{8,3}[23]

Dekagram je zvjezdasti mnogokut{10,3}.



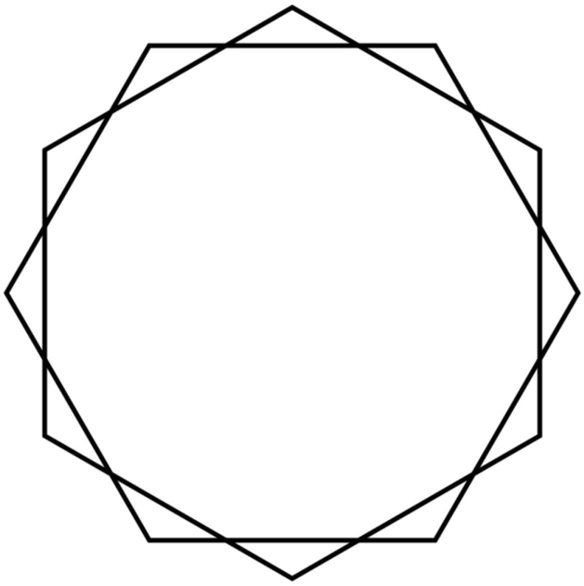
Slika 24. Zvjezdasti mnogokut{10,3} [24]

Dodekagram je zvjezdasti mnogokut{12,5}.



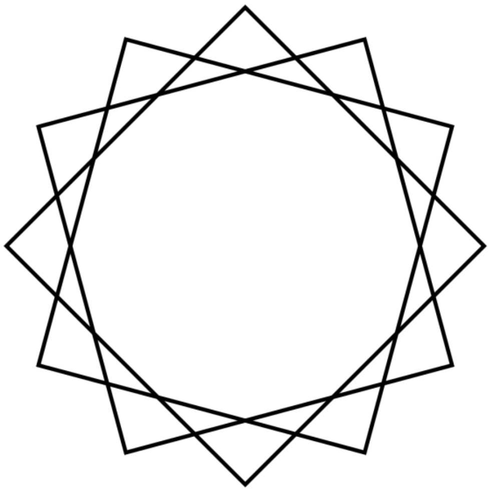
Slika 25. Zvjezdasti mnogokut{12,5} [25]

Primjer dvanaesterokuta kod kojeg se spaja svaki drugi vrh.



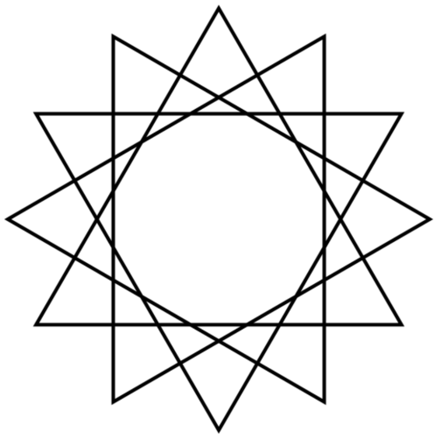
Slika 26. Zvjezdasti mnogokut{12,2} [26]

Primjer dvanaesterokuta kod kojeg se spaja svaki treći vrh.



Slika 27. Zvjezdasti mnogokut{12,3} [27]

Primjer dvanaesterokuta kod kojeg se spaja svaki četvrti vrh:.



Slika 28. Zvjezdasti mnogokut{12,4} [28]

7. Zaključak

Cilj ovoga završnog rada bio je detaljno istražiti i razraditi teme povezane s mnogokutima i njihovim dijagonalama te napraviti izračune vezane uz njih. Broj sjecišta dijagonala za neparne mnogokute relativno je jednostavno izračunati, ali za parne mnogokute to nije tako. Parni mnogokuti sijeku se i u sredini. Jednako vrijedi i za broj regija pravilnog mnogokuta. Neki od simbola u svakodnevnome životu, kao što su pentagram i Davidova zvijezda, dobiveni su spajanjem vrhova unutar mnogokuta. Mnogokuti i sva njihova svojstva jedan su od važnih dijelova geometrije. Broj sjecišta dijagonala unutar pravilnog neparnog mnogouta jednostavno je za izračunati. Za pravilni parni mnogokut formule su dosta teže, jer se treba uračunati i središte mnogokuta gdje se sjeku dijagonale.Kod broja regija pravilnog mnogokuta potrebno je koristiti Eulerovu formulu. Broj regija za neparni pravilni mnogokut formula je jednostavna kao i kod broja sjecišta. Neki od zvjezdastih mnogokuta simboli su u svakodnevnome životu({5,2}, {6,2}).

8. Popis slika

9. Popis tablica

10.Popis grafikona

11. Izvori slika

[1] Izrada autora

[2] https://www.shmoop.com/quadrilaterals/polygons.html

[3] https://qph.fs.quoracdn.net/main-qimg-82db307ed9a239a24f5518ac86dfd55f

[4] https://mathblog.com/reference/geometry/heptagon/

[5] https://image.tutorvista.com/content/feed/u1298/Polygon%2002.PNG

[6] https://i0.wp.com/mathblog.com/wp-content/uploads/2017/03/octagon.jpeg?resize=300%2C300&ssl=1

[7] https://i.stack.imgur.com/JfWSI.png

[8]https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/dd/Regular_nonagon.svg/2000px-Regular_nonagon.svg.png

[9] https://qph.fs.quoracdn.net/main-qimg-920a611c8a4d19012533546b5a1e4654

[10] https://thumbnail.imgbin.com/18/2/8/imgbin-regular-polygon-polytope-geometry-icosagon-others-R2zy60AbZU95eVhdV6Ljzrw8D_t.jpg

[11] Number of diagonals and sub-areas one can create inside polygons (2016.)

[12] http://mathman.biz/images/pent1.gif

[13]https://2aih25gkk2pi65s8wfa8kzvi-wpengine.netdna-ssl.com/gre/files/2016/09/regular-hexagon-with-diagonals-from-a-vertex.jpg

[14] https://rechneronline.de/pi/img/w/heptagon-short-diagonals.png

[15] https://rechneronline.de/pi/img/w/heptagon-long-diagonals.png

[16]https://2aih25gkk2pi65s8wfa8kzvi-wpengine.netdna-ssl.com/gre/files/2016/09/regular-octagon-with-stars.jpg

[17]https://2aih25gkk2pi65s8wfa8kzvi-wpengine.netdna-ssl.com/gre/files/2016/09/regular-octagon-with-stars.jpg

[18] http://www.freemasons-freemasonry.com/pentagram_freemasonry.html

[19]https://i0.wp.com/proofsfromthebook.com/wp-content/uploads/2013/08/pentagram2.png

[20] http://jaced.com/blogpix/2009/goldenpentagram.gif

[21] http://mathworld.wolfram.com/Hexagram.html

[22] https://starofdavidsite.files.wordpress.com/2016/06/sodmagic6sta26.jpg

[23] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b9/Octagram.png

[24] http://asy.marris.fr/asymptote/Polygones/fig_qa02_290208_decagramme.png

[25] http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/dodecagram_1000.gif

[26]https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/ff/Star_polygon_12-2.svg/1024px-Star_polygon_12-2.svg.png

[27] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a4/Star_polygon_12-3.svg/1024px-Star_polygon_12-3.svg.png

[28]https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d6/Star_polygon_12-4.svg/1024px-Star_polygon_12-4.svg.png

12. Literatura

1. Math Open Reference: https://www.mathopenref.com/hexagon.html
2. Tutor Vista https://math.tutorvista.com/geometry/regular-hexagon.html
3. Math Blog https://mathblog.com/reference/geometry/heptagon/
4. Tutor Vista https://math.tutorvista.com/geometry/heptagon.html
5. Math Blog https://mathblog.com/reference/geometry/octagon/
6. Math Open Reference: https://www.mathopenref.com/nonagon.html
7. WolframMathWorldhttp://mathworld.wolfram.com/Pentagram.html
8. Mythologian https://mythologian.net/star-of-david-jewish-star-meaning-definition-history/

9.Poonen, B. i Rubinstein, M. "NumberofIntersectionPointsMadebytheDiagonalsof a RegularPolygon." (1998.)

10. Coxeter, H.S.M "Introduction to Geometry." (1969.)
11. Savio i Suryanaroyan (1993.)
12. Rechner https://rechneronline.de
13. Number of diagonals and sub-areas one can create inside polygons (2016.)