Četverodimenzionalna kugla

Brusar, Lenon

MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU

STRUČNI PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ RAČUNARSTVO

Lenon Brusar

ČETVERODIMENZIONALNA KUGLA

ZAVRŠNI RAD

Čakovec, 2023.

MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU

STRUČNI STUDIJ RAČUNARSTVO

Lenon Brusar

ČETVERODIMENZIONALNA KUGLA

FOUR-DIMENSIONAL SPHERE

ZAVRŠNI RAD

Mentor: prof. Tibor Rodiger

Čakovec, 2023.

MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU
ODBOR ZA ZAVRŠNI RAD

Čakovec, 20. veljače 2023.

ZAVRŠNI ZADATAK br. 2022-RAČ-R-108

Pristupnik:	**Lenon Brusar (0313024196)**
Studij:	Redoviti preddiplomski stručni studij Računarstvo
Smjer:	Inženjerstvo računalnih sustava i mreža

Zadatak: **Četverodimenzionalna kugla**

Opis zadatka:

Izrada aplikacije koja će prikazivati četverodimenzionalnu kuglu. Četverodimenzionalni koordinatni sustav, računanje duljine, određivanje točaka kugle.

Rok za predaju rada: 20. rujna 2023.

Mentor:

Tibor Rodiger, v. pred.

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

SAŽETAK

U ovom završnom radu naslovljenom *Četverodimenzionalna kugla* opisat ću kako se ponaša četverodimenzionalna kugla u prostoru s četiri *dimenzije*. Poznato je da točka nema nijednu od četiri *dimenzije*, pravac ima samo duljinu, ravnina ima duljinu i širinu, a *četverodimenzionalni prostor* sadržava četiri *dimenzije*. Za prikazivanje *dimenzija* u ovom slučaju koristimo četverodimenzionalni koordinatni sustav. Četverodimenzionalni koordinatni sustav sastoji se od četiri međusobno okomite osi koje se sijeku u ishodištu. Osim osi koje označavaju prostorne *dimenzije* x, y i z os, dodajemo i četvrtu os. U ovom istraživanju fokusiramo se na razvoj aplikacije koja omogućuje korisniku unos podataka i izračunavanje *volumena,* površine te provjeru nalazi li se određena točka na *četverodimenzionalnoj kugli*. Ova aplikacija je implementirana u programskom jeziku Python uz korištenje odgovarajućih matematičkih formula i algoritama. Kroz ovu aplikaciju korisnik može unijeti parametre *četverodimenzionalne kugle*, kao što su koordinate središta kugle i radijus, te dobiva izračunate vrijednosti *volumena* i *površine* kugle. Ovi izračuni temelje se na matematičkim formulama prilagođenim *četverodimenzionalnom prostoru*. Također, aplikacija omogućuje korisniku da unese određenu točku i provjeri nalazi li se ta točka na površini ili unutar *četverodimenzionalne kugle*. Ovu provjeru provodimo pomoću odgovarajuće jednadžbe. Implementacija ove aplikacije koristi matematičke koncepte i algoritme kako bi omogućila korisniku da interaktivno istražuje i razumije *četverodimenzionalne kugle*. Kroz takvu aplikaciju se olakšava vizualizacija i manipulacija četverodimenzionalnim geometrijskim oblicima, doprinoseći boljem razumijevanju *četverodimenzionalnog prostora* i njegovih svojstava. U ovom istraživanju émo započeti s proučavanjem obične kružnice, kruga i njihovih matematičkih formula koje ih opisuju. Opisat ćemo još i što je opseg, polumjer, promjer, *oplošje* i ostale stvari koje su povezane s krugom i kružnicom. Istaknut ćemo karakteristike kruga poput površine kako bismo dobili temelje za razumijevanje složenijih oblika. Nakon toga, proširit ćemo naše znanje na trodimenzionalnu kuglu i sferu, istražujući njihovu konstrukciju, parametre i svojstva. Fokusirat ćemo se na formulaciju kugle koristeći polumjer i središte kako bismo definirali njezin oblik. Nakon usvajanja koncepta trodimenzionalne kugle, prelazimo na fascinantnu *četverodimenzionalnu kuglu* i četverodimenzionalnu sferu. Proučavamo formule za *volumen* i površinu *četverodimenzionalne kugle* i jednadžbu uz pomoć koje možemo utvrditi da li je jedna određena točka dio te kugle.

Ključne riječi: *Četverodimenzionalna kugla, volumen, dimenzije, četverodimenzionalni prostor, oplošje*

Sadržaj

Popis slika:

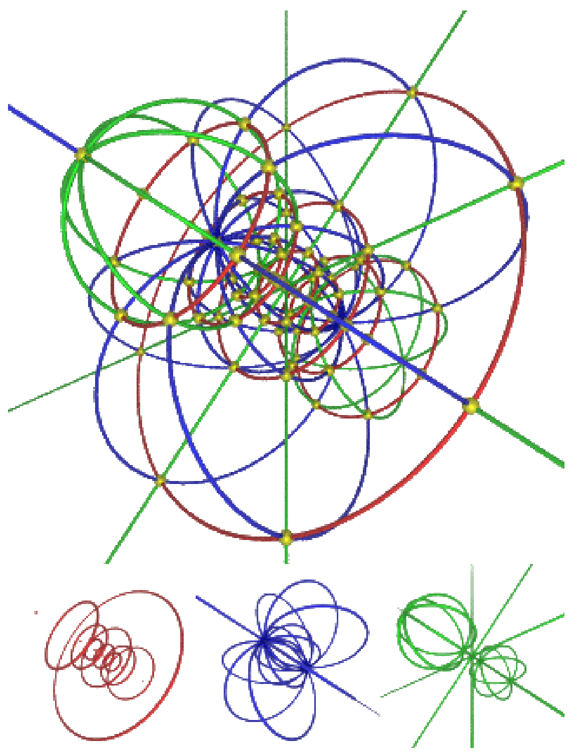
Popis kodova:

1. UVOD

Četverodimenzionalna kugla je poseban oblik koji postoji u četverodimenzionalnom prostoru. Dok smo navikli na kugle u trodimenzionalnom svijetu, četverodimenzionalna kugla je imaginarna konstrukcija koja proširuje našu intuiciju o geometriji.

Kao i obična kugla, četverodimenzionalna kugla ima središte i radijus. Međutim, umjesto da se prostire u tri dimenzije kao obična kugla, četverodimenzionalna kugla postoji u četiri dimenzije. To znači da osim tri prostorne dimenzije, ima i dodatnu, četvrtu dimenziju koja se matematički opisuje.

Četverodimenzionalna kugla je apstraktni koncept koji se koristi u matematičkim istraživanjima i teorijama kako bi se bolje razumjele četverodimenzionalne geometrije. Iako je teško vizualizirati takvu kuglu u našem trodimenzionalnom svijetu, njezina analiza pomaže u razumijevanju složenijih koncepta i modeliranju prostora u višim dimenzijama.



Slika 1. Četverodimenzionalna kugla

Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere (pristupljeno 02.07.2023.)

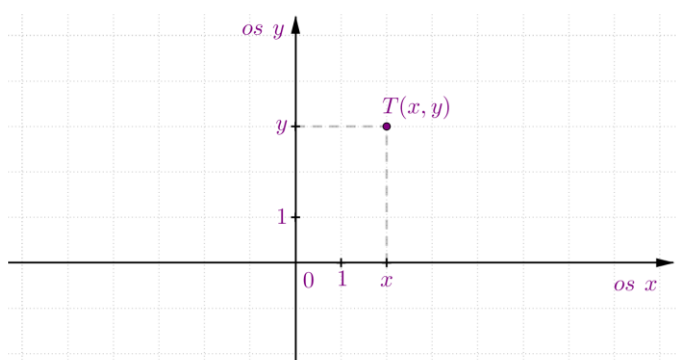
2. KOORDINATNI SUSTAV

Koordinatni sustavi omogućuju opisivanje točaka na pravcu, plohi, u ravnini ili u prostoru pomoću brojeva, koje nazivamo koordinatama. Ovaj sustav koordinata je nazvan po Renéu Descartesu, koji ga je otkrio u prvoj polovici 17. stoljeća, te se stoga naziva Kartezijev koordinatni sustav. Otkriće ovog sustava omogućilo je sustavno proučavanje mnogih geometrijskih oblika analitičkom geometrijom, analizom i algebrom.

Postoji nekoliko vrsta koordinatnih sustava, uključujući sustav na pravcu, u ravnini, u prostoru, kosokutni i polarni. Kartezijev koordinatni sustav omogućio je jednostavno prikazivanje geometrijskih objekata pomoću brojeva i algebarskih izraza, čime se omogućio razvoj analitičke geometrije. Analitička geometrija omogućuje da se geometrijski objekti opišu matematičkim izrazima, a matematičke operacije se mogu primijeniti na njih. To znači da se geometrijski objekti mogu proučavati i analizirati na znatno precizniji način nego što je to bilo moguće prije otkrića koordinatnog sustava.

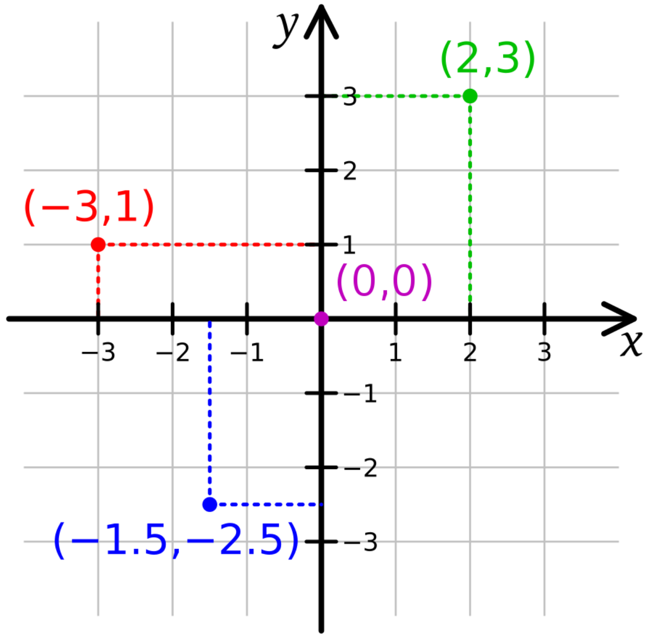
Slika 2. Koordinatni sustav na pravcu

Izvor: https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/a78d0498-ffcf-4a2d-a9fb-6c5d40275fc2/html/1203_Koordinatni_sustav_na_pravcu.html (pristupljeno 4.5.2023.)

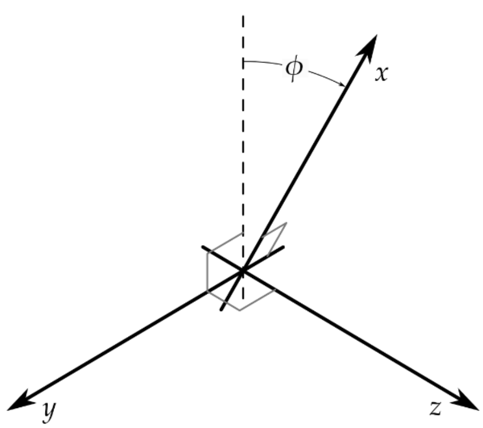


Slika 3. Koordinatni sustav u ravnini

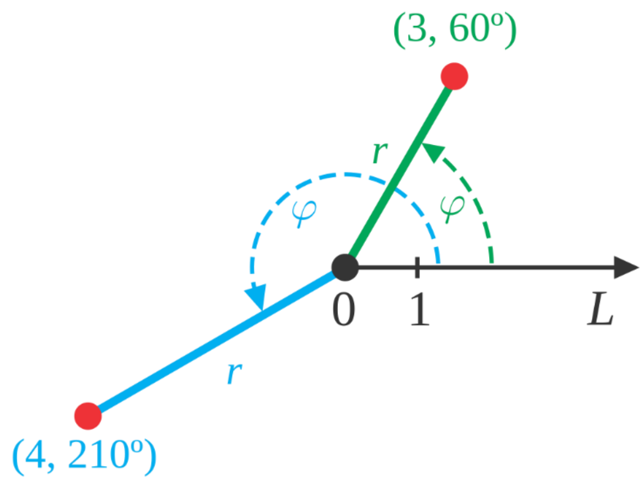
Izvor: https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/20de11be-7247-43b7-b6a7-39a0eaecedaa/html/262_pravokutni_koordinatni_sustav_u_ravnini.html (pristupljeno 4.5.2023.)



Slika 4. Kartezijev koordinatni sustav u ravnini.
Izvor: https://hr.wikipedia.org/wiki/Kartezijev_koordinatni_sustav (pristupljeno 4.5.2023.)



Slika 5. Primjer kosokutnog koordinatnog sustava.
Izvor: https://hr.wikipedia.org/wiki/Koordinatni_sustav (pristupljeno 4.5.2023.)



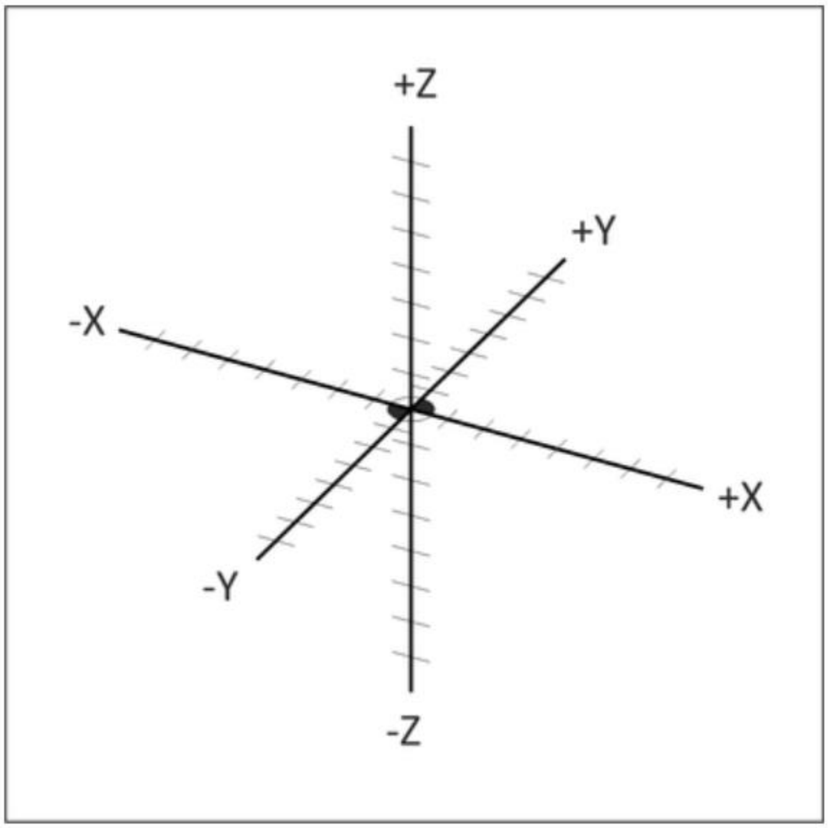
Slika 6. Polarni koordinatni sustav.
Izvor: https://hr.wikipedia.org/wiki/Koordinatni_sustav (pristupljeno 4.5.2023.)

2.1. Koordinatni sustav u prostoru

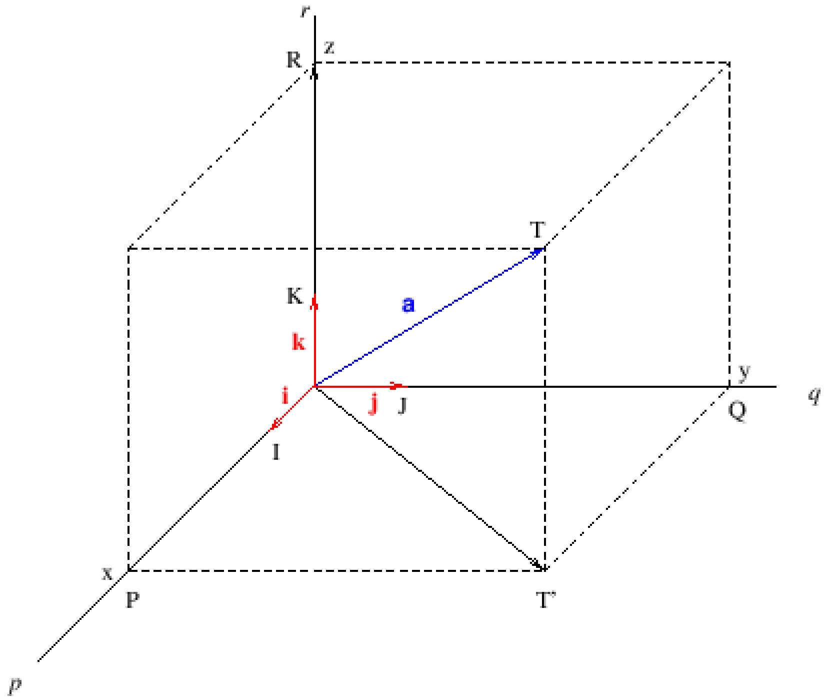
Koordinatni sustav u prostoru predstavlja trodimenzionalni sustav koji služi za opisivanje položaja točke u prostoru uz pomoć tri koordinate: x, y i z. Sustav se sastoji od tri okomitih koordinatnih osi koje se međusobno sijeku u jednoj zajedničkoj točki, koju zovemo ishodište.

U prostoru postoji osam oktanata, koji su slični kvadrantima u koordinatnom sustavu ravnine. Prvi kvadrant je smješten iznad ravnine koju čine koordinatne osi x i y, drugi kvadrant se nalazi iznad ravnine koju čine koordinatna os x i negativna koordinatna os y, treći kvadrant je iznad ravnine koju čine negativne koordinatne osi x i y, dok se četvrti kvadrant nalazi iznad ravnine koju čine negativna koordinatna os x i pozitivna koordinatna os y.

Prostor se također dijeli na donji dio, koji je ispod ravnine x-y, te gornji dio, koji se nalazi iznad ravnine x-y. Točka u prostoru opisuje se pomoću tri koordinate (x, y, z), gdje je x koordinata točke na koordinatnoj osi x, y koordinata točke na koordinatnoj osi y, a z koordinata točke na koordinatnoj osi z.



Slika 7. Kartezijev pravokutni 3D koordinatni sustav
Izvor: https://cnc.com.hr/koordinatni-sustav/ (pristupljeno 11.5.2023)



Slika 8. Koordinatizacija prostora

Izvor: http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node55.html

(pristupljeno 11.5.2023.)

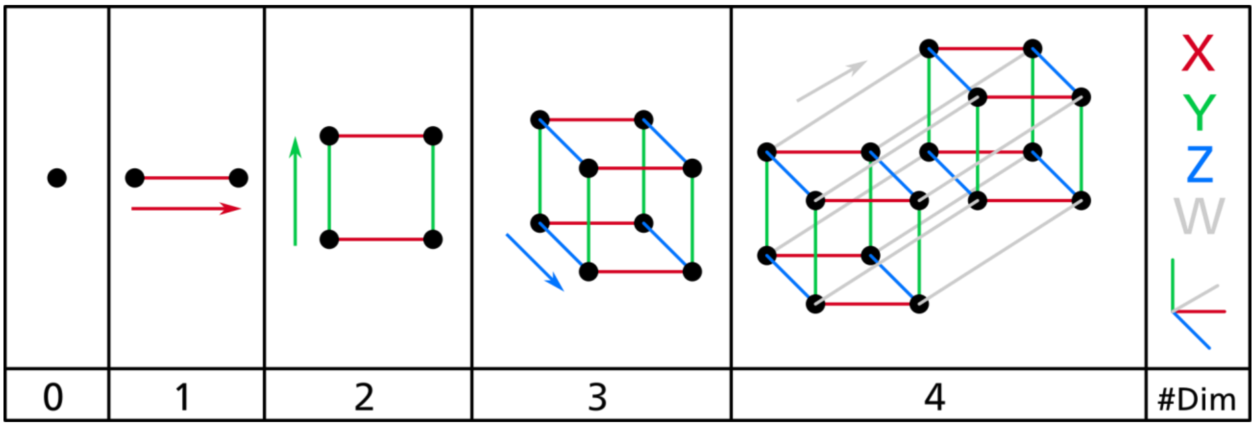
Oktanti su osam dijelova u koordinatnom sustavu u prostoru koji nastaju presijecanjem tri okomite koordinatne osi. Prvo se prostor dijeli na gornji i donji dio pomoću ravnine koju tvore koordinatne osi x i y, a zatim se taj gornji i donji dio dalje dijele na četiri dijela s obzirom na koordinatnu os z. Svaki od tih osam dijelova naziva se oktantom. Na slici 12 možemo vidjeti jedan od oktanata.

2.2. Četverodimenzionalni koordinatni sustav

Četverodimenzionalni koordinatni sustav je nešto što matematičari koriste kako bi opisali položaj u četverodimenzionalnom prostoru. Sustav se sastoji od četiri međusobno okomite koordinatne osi koje se sijeku u zajedničkoj točki, koju nazivamo ishodištem. Prve tri koordinatne osi su zapravo slične onima u trodimenzionalnom prostoru, a zovemo ih x, y i z i u nekim slučajevima označavamo ih s x_1,x_2, x_3. Ovdje je prisutna i četvrta koordinatna os koja je okomita na prve tri, a nazivamo ju w os ili os hipervolumena. Četverodimenzionalni prostor se sastoji od hiperravnina, a ne ravnih ploha kao u trodimenzionalnom prostoru.

Kada opisujemo položaj točke u četverodimenzionalnom prostoru, koristimo četiri koordinate (x_1, x_2, x_3, x_4).

Koncept četverodimenzionalnog koordinatnog sustava koristi se u raznim područjima poput teorijske fizike, računalne grafike, računalne znanosti i drugima.



Slika 9. Dimenzije

Izvor: https://hr.wikipedia.org/wiki/Dimenzija (pristupljeno 11.5.2023.)

Na slici 9 možemo vidjeti četiri različite dimenzije. Prvo vidimo točku koja nema dimenzija, nakon toga vidimo ravninu koja ima jednu dimenziju. Slijedeća je kocka s dvije dimenzije i nju možemo usporediti s koordinatnim sustavom u ravnini. S tri dimenzije vidimo kocku i nju možemo usporediti s jednim oktantom u trodimenzionalnom koordinatnom sustavu i na kraju vidimo prikaz kako bi mogle izgledati četiri dimenzije.

3. UDALJENOST TOČAKA

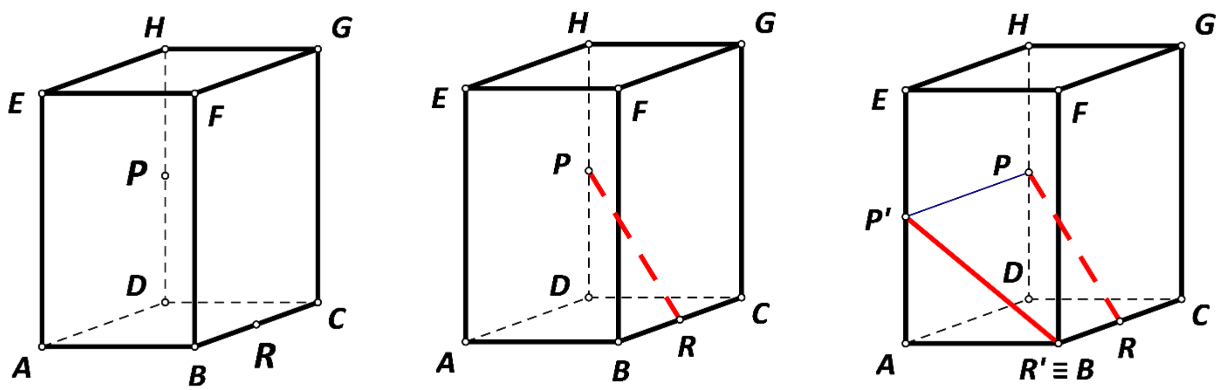
U dvodimenzionalnom prostoru, udaljenost između dvije točke može se izračunati pomoću Pitagorinog poučka ili formule srednje vrijednosti, ovisno o poznatim koordinatama točaka.

Udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{1}$$

U trodimenzionalnom prostoru, udaljenost između dvije točke $A(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A})$ i $B(x_{1B}, x_{2B}, x_{3B})$ izračunava se pomoću Pitagorinog poučka u tri dimenzije.

$$d = \sqrt{(x_{1B} - x_{1A})^2 + (x_{2B} - x_{2A})^2 + (x_{3B} - x_{3A})^2} \tag{2}$$



Slika 10. Primjer udaljenosti točaka u prostoru

Izvor: https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/d2d61772-7e7a-4f5b-98f9-6bbb5d5d13ca/html/10659_Udaljenost_tocke_od_ravnine.html (pristupljeno 11.5.2023.)

U četverodimenzionalnom prostoru, udaljenost između dvije točke može se izračunati pomoću Minkowskogovog prostora i intervala između tih točaka. Minkowskogov prostor koristi se u teoriji relativnosti za opisivanje udaljenosti i relativne pozicije objekata. Interval između dvije točke izražava se formulom koja uključuje prostorne razlike između točaka.

$$d = \sqrt{(x_{1B} - x_{1A})^2 + (x_{2B} - x_{2A})^2 + (x_{3B} - x_{3A})^2 + (x_{4B} - x_{4A})^2} \tag{3}$$

U ovoj formuli, dvije točke se određuju njihovim koordinatama u četverodimenzionalnom prostoru, koje su označene kako slijedi:

Točka $A(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A,}, x_{4A,})$

Točka $B(x_{1B}, x_{2B}, x_{3B}, x_{4B})$

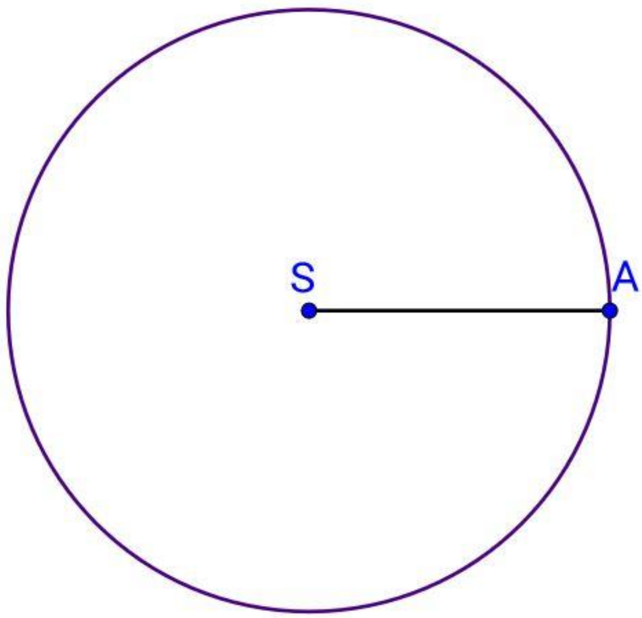
U svim tim prostorima, udaljenost točaka može se koristiti u različitim disciplinama kao što su geometrija, građevinarstvo, fizika i druga znanstvena područja.

4. KRUŽNICA I KRUG

4.1. Kružnica

U matematici, kružnica je jedan od najosnovnijih geometrijskih oblika i ona zauzima posebno mjesto zbog svoje jednostavnosti, simetrije i bogatstva matematičkih formula. U daljnjem tekstu istražit ćemo neke ključne formule i primjene koje proizlaze iz matematičke ljepote kružnice.

Definicija 1: Kružnica je skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne središnje točke koju nazivamo središte.



Slika 11. Kružnica

Izvor: https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/a6f87512-d687-4911-b48a-367e2bfb4cb8/html/10746_Osnovno_o_kruznici_i_krugu.html

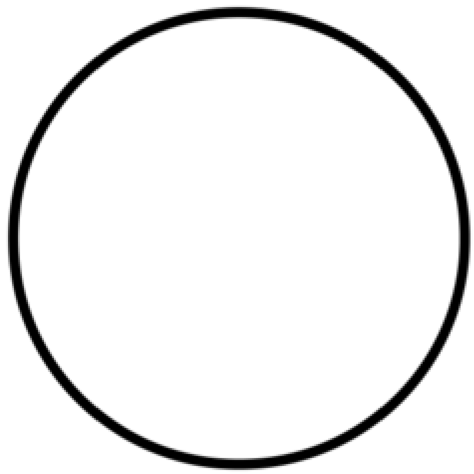
(pristupljeno 02.07.2023.)

Kružnica ima mnoge primjene u matematici i stvarnom svijetu. Na primjer, u geometriji se koristi za konstrukciju i analizu drugih oblika poput valjaka, stožaca i sfere. Također se koristi u trigonometriji i analitičkoj geometriji za proučavanje raznih funkcija i zakona. U fizici, kružni pokret je važan za proučavanje rotacijskih kretanja tijela, a u inženjeringu se primjenjuje u konstrukciji kotača, ležajeva i rotacijskih strojeva.

4.2. Krug

Krug je jedan od osnovnih geometrijskih likova koji se koristi u mnogim matematičkim i fizičkim disciplinama. Krug se nalazi u dvije dimenzije.

Definicija 2: Krug je skup svih točaka u ravnini koje su manje ili jednako udaljene od jedne središnje točke koju nazivamo središte.



Slika 12. Krug

Izvor: https://globalsymbols.com/symbolsets/crna-gora/symbols/25399?locale=en

(pristupljeno 6.6.2023)

Krug je vrlo važan geometrijski lik u matematici i ima mnoge primjene. Evo nekoliko primjera:

- Geometrija: Krug je osnova za proučavanje mnogih drugih geometrijskih likova i odnosa. Na primjer, mnogi teoremi i postupci u geometriji koriste se za rješavanje problema koji uključuju krugove.

- Fizika: Krugovi se često koriste u fizici za opisivanje kretanja, poput rotacije tijela ili orbitalnih putanja planeta i satelita. Krugovi se također koriste za izračunavanje površina i volumena cilindara i kugli.

- Tehnologija: Krugovi se koriste u različitim tehničkim disciplinama, poput građevinske tehnologije, strojarske tehnologije i elektroničke tehnologije. Na primjer, u građevinskoj tehnologiji se koriste krugovi za izračunavanje radijusa zakrivljenosti cesta i projektiranje rotora za strojeve.

- Astronomija: Krugovi su ključni za proučavanje nebeskih tijela i njihovih kretanja. Na primjer, putanje planeta u našem solarnom sustavu su gotovo kružne.

Ovo su samo neki od aspekata i primjena kruga. Krug je temeljni koncept u matematici i ima širok raspon primjena u raznim područjima znanja.

4.3. Formule za krug i kružnicu

Definicija 3: Radijus ili polumjer (r) kruga je dužina koja spaja središta kruga i bilo koje točke na kružnici.

Svi radijusi u krugu su jednake duljine.

Definicija 4 : Promjer ili dijametar (d) je dužina koja prolazi kroz središte kružnice i čiji krajevi se nalaze na kružnici.

Duljina promjera kruga je udvostručena duljina polumjera.

$$d = 2r \tag{4}$$

Opseg kruga ili duljina kružnice:

Definicija 5 : Opseg kruga je duljina kružnice.

Opseg kruga obuhvaća ukupnu duljinu kružnice. Izračunava se po formuli:

$$O = 2r\pi \tag{5}$$

gdje je O opseg kružnice, a r je njezin polumjer

Površina :

Definicija 6 : Površina kruga je površina koju krug zauzima u ravnini.

Izračunavanje oplošja kruga je važan koncept u matematici i koristi se u mnogim područjima, poput geometrije, fizike, inženjerstva i mnogih drugih.

Formula za izračunavanje oplošja kruga je:

$$P = r^2\pi \tag{6}$$

Gdje je P oznaka za oplošje ili površinu kruga, r je polumjer kruga, a π (pi) je matematička konstanta koja je približno jednaka 3.14159.

Pomoću formule za oplošje kruga možemo izračunati koliko kvadratnih jedinica površine zauzima određeni krug u ravni. Na primjer, ako znamo da je polumjer kruga 5 cm, možemo izračunati njegovo oplošje na slijedeći način

Primjer 1: Izračunaj površinu kruga s polumjerom 5 cm.

$$P = \pi(5^2) = 78.54\ cm^2$$

Dobiveni rezultat izražen je u kvadratnim centimetrima.

Važno je napomenuti da se π koristi kao približna vrijednost jer je riječ o iracionalnom broju koji nema konačan decimalni zapis. Za mnoge praktične primjene, obično se koristi približna vrijednost π = 3.14159 ili se koristi dostupna vrijednost s većom preciznošću prema potrebi.

Oplošje kruga je osnovni koncept u geometriji i ima brojne primjene, poput izračunavanja površina krugova u planiranju vrtova, izračunavanja površina kotača u inženjerstvu, izračunavanja površina cilindara i mnogih drugih geometrijskih problema.

Duljina kružnog luka:

Duljina luka je udaljenost između dvije točke na kružnici i izračunava se pomoću formule:

$$L = r\theta \tag{7}$$

gdje je L duljina kružnog luka, r je polumjer kružnice, a θ je središnji kut u radijanima koji odgovara tom luku.

4.4. Krug i kružnica u koordinatnom sustavu

Kružnica ima iste matematičke karakteristike kao i krug, ali ne posjeduje unutrašnje područje kao krug. Središte kružnice se označava koordinatama (s_1, s_2), a radijus kružnice, označen s r, određuje udaljenost između središta kružnice i svih točaka na kružnici. Kružnica se može matematički opisati istom jednadžbom kao i krug.

Jednadžba kružnice u koordinatnom sustavu u ravnini sa središtem u ishodištu je

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \tag{8}$$

Jednadžba kružnice u koordinatnom sustavu u ravnini je

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 = r^2 \tag{9}$$

Gdje je $S(s_1, s_2)$ središte kružnice, a r polumjer kružnice.

Jednadžba kruga u koordinatnom sustavu u ravnini sa središtem u ishodištu je

$$x_1^2 + x_2^2 \leq r^2 \tag{10}$$

Jednadžba kruga u koordinatnom sustavu u ravnini je

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 \leq r^2 \tag{11}$$

Gdje je $S(s_1, s_2)$ središte kružnice, a r polumjer kružnice.

Primjer 2 : Provjeri je li točka (3, 4) unutar ili na rubu kružnice s centrom (0, 0) i polumjerom 5.

$$(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2 \leq 5^2$$

$$9 + 16 \leq 25$$

$$25 \leq 25$$

Možemo zaključiti da se točka nalazi na kružnici.

5. KUGLA I SFERA

5.1. Kugla

Definicija 7 : Kugla je skup svih točaka u prostoru koje su manje ili jednako udaljene od jedne središnje točke koju nazivamo središte.

Kugla je izuzetno zanimljiva geometrijsko tijelo koje nas okružuje u mnogim aspektima našeg svakodnevnog života. Ona se, za razliku od kruga, nalazi u tri dimenzije. Njezina savršeno simetrična forma privlači našu pažnju i potiče na razmišljanje o njezinim svojstvima i primjenama. Kroz povijest, kugla je bila predmet proučavanja i divljenja od strane matematičara, znanstvenika i umjetnika.

Kugla se često opisuje kao savršeno simetrično tijelo. Njezina jednostavna, ali elegantna geometrija omogućuje nam razumijevanje i primjenu u različitim područjima poput arhitekture, inženjerstva, fizike i mnogih drugih.

Osim svoje estetske privlačnosti, kugla ima i praktične primjene. Primjerice, u fizici, kugla se koristi kao idealizirani model za opisivanje i analizu raznih fizičkih fenomena. U inženjeringu, kugle se koriste kao ležajevi, valjci, kuglasti ventili i drugi dijelovi strojeva.

Kugla također igra važnu ulogu u umjetnosti. Umjetnici često koriste kuglu kao inspiraciju za svoje stvaralaštvo, bilo da je riječ o skulpturama, slikama ili dizajnu.

Ukratko, kugla je jedno od najosnovnijih i najuniverzalnijih geometrijskih tijela. Njezina simetrija, jednostavnost i praktičnost čine je zanimljivom za proučavanje i primjenu u raznim područjima.

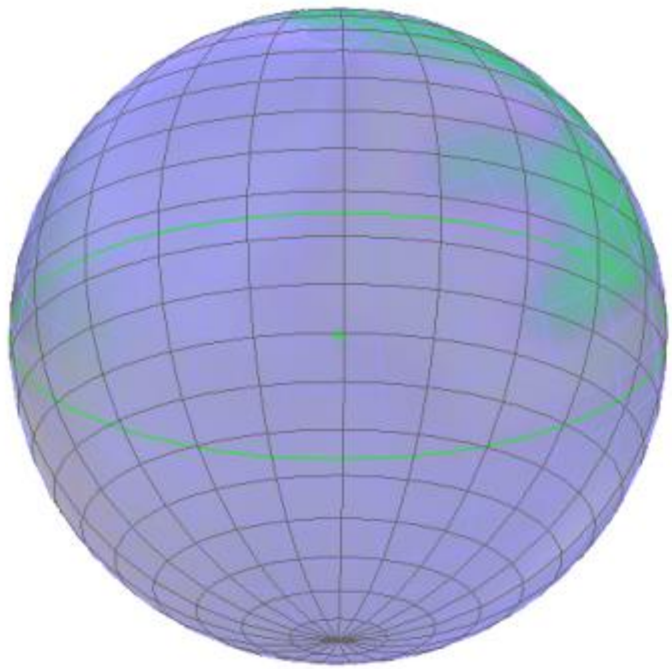
Slika 13. Kugla
Izvor: https://hr.izzi.digital/DOS/104/385.html (pristupljeno 6.6.2023.)

Slika 14. Primjer kugle u pravom životu (kugla za kuglanje)
Izvor: https://ezadar.net.hr/sport/2313519/kuglanje-cetiri-susreta-cetiri-poraza/
(pristupljeno 6.6.2023)

5.2. Sfera

Sfera je jedan od fundamentalnih trodimenzionalnih geometrijskih oblika. Ona je skup svih točaka u prostoru koje su jednako udaljene od jedne centralne točke. Sfera ima mnoge zanimljive i važne osobine te ima široku primjenu u matematici, fizici i inženjeringu.

Definicija 8 : Sfera je skup svih točaka u prostoru koje su jednako udaljene od jedne središnje točke koju nazivamo središte.



Slika 15. Sfera
Izvor: https://www.wikiwand.com/sl/Sfera (pristupljeno 05.07.2023)

Sfera i kugla su međusobno povezani pojmovi koji opisuju isti geometrijski oblik, ali koriste se u različitim kontekstima i perspektivama.

Sfera se odnosi na vanjsku površinu trodimenzionalnog oblika, a s druge strane, kugla se koristi za opisivanje unutarnjeg prostora sfere ili samog oblika koji je ograničen površinom sfere. Površina sfere je beskonačno glatka i ravnomjerna. Kugla je trodimenzionalni oblik koji obuhvaća prostor unutar sfere.

Dakle, sfera i kugla se odnose na isti geometrijski oblik, ali sfera se fokusira na vanjsku površinu, dok se kugla fokusira na unutarnji prostor. Možete zamisliti sferu kao ljusku ili površinu, dok je kugla puna i zatvorena.

5.3. Formule za sferu i kuglu

Oplošje kugle je površina sfere.

Oplošje je površina koju obuhvaća neki geometrijski oblik. Kod kugle, oplošje je površina koja se nalazi na vanjskoj strani kugle i određuje se kao količina prostora koju bi kugla zauzela da se rastavi i raširi u ravninu.

Oplošje kugle se izračunava pomoću formule:

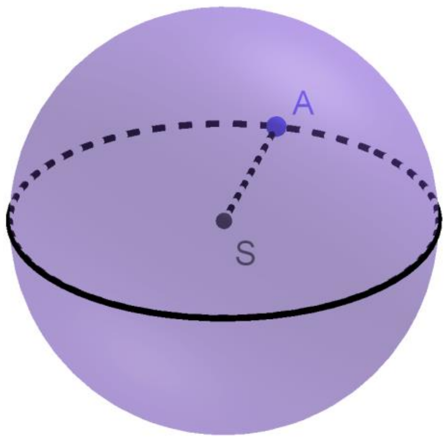
$$P = 4\pi r^2 \tag{12}$$

gdje je "r" polumjer kugle, a "π" (pi) konstanta koja se približno iznosi 3.14159. Ova formula se može primijeniti za izračunavanje oplošja kugle bilo koje veličine.

Primjer 3: Izračunaj oplošje kugle koja ima polumjer 2 metra.

$$P = 4\pi(2^2) = 16\pi\ m^2$$

Ovo znači da je oplošje kugle s polumjerom 2 metra približno 50.27 metara kvadratnih.



Slika 16.Primjer Kugle sa središtem
Izvor: https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10743_Kugla.html (pristupljeno 11.5.2023)

Volumen kugle je jedna od osnovnih karakteristika koja opisuje njezinu geometriju.

Da bismo izračunali volumen kugle, koristimo formulu. Formula za volumen kugle izgleda ovako:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{13}$$

Gdje je V volumen kugle, π (pi) je matematička konstanta, približno jednaka 3.14159, a r je polumjer kugle.

Definicija 9 : Volumen je mjera prostora koji objekt ili neki geometrijski lik zauzima.

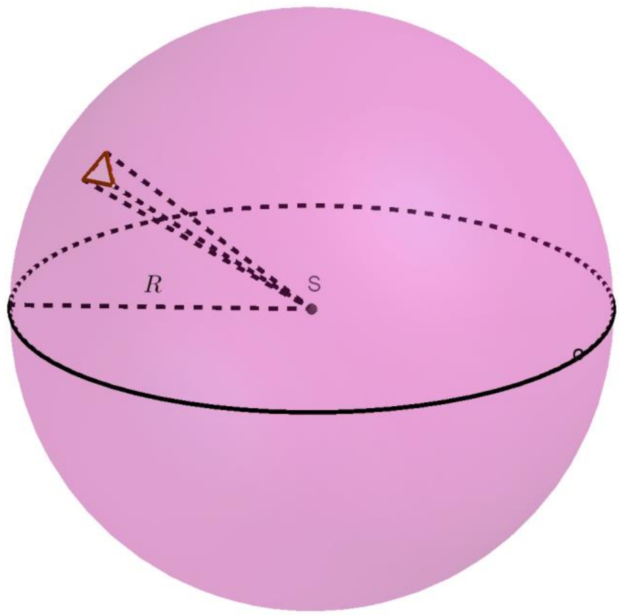
Primjer 4: Izračunaj volume kugle ako joj je polumjer 5 centimetara.

$$V = \frac{4}{3}\pi 5^3$$

$$\approx 523.599cm^3$$

Dakle, volumen kugle s polumjerom 5 cm iznosi približno 523.599 centimetara kubnih.

Volumen kugle je korisna veličina koja se primjenjuje u mnogim područjima, poput matematike, fizike, inženjerstva, astronomije i drugih znanstvenih disciplina.



Slika 17. Kugla sa središtem i polumjerom

Izvor: https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10743_Kugla.html (pristupljeno 6.6.2023.)

5.4. Sfera i kugla u koordinatnom sustavu

Sfera i kugla se mogu definirati i opisivati u koordinatnom sustavu koristeći trodimenzionalnu geometriju.

Jednadžba sfere u koordinatnom sustavu sa središtem u ishodištu je:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \tag{14}$$

Jednadžba sfere u koordinatnom sustavu u prostoru je

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 = r^2 \tag{15}$$

Gdje je $S(s_1, s_2, s_3)$ središte kružnice, a r polumjer kružnice.

Jednadžba kugle u koordinatnom sustavu sa središtem u ishodištu je:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2 \tag{16}$$

Kugla se može opisati sferom zajedno s njenim unutarnjim prostorom. Dakle, jednadžba kugle u koordinatnom sustavu je:

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 \leq r^2 \tag{17}$$

Gdje je $S(s_1, s_2, s_3)$ središte kružnice, a r polumjer kružnice.

Primjer 5: Provjeri je li točka (1, 2, 3) unutar ili na rubu sfere s centrom (4, 5, 6) i radijusom 7.

$$(1 - 4)^2 + (2 - 5)^2 + (3 - 6)^2 \leq 7^2$$

$$(-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2 \leq 49$$

$$9 + 9 + 9 \leq 49$$

$$27 \leq 49$$

Možemo zaključiti da se točka nalazi u kugli, ali ne i na sferi.

Koordinate točaka na površini sfere ili kugle mogu se izračunati i koristiti u različitim problemima i primjenama, kao što su računalna grafika, inženjering, modeliranje i mnogi drugi.

6. ČETVERODIMENZIONALNA KUGLA I ČETVERODIMENZIONALNA SFERA

6.1. Četverodimenzionalna sfera

Definicija 10 : Četverodimenzionalna sfera je skup svih točaka u četverodimenzionalnom prostoru koje su jednako udaljene od jedne središnje točke koju nazivamo središte.

Četverodimenzionalna sfera, poznata i kao sferska hiperravnina, predstavlja generalizaciju sfere na četiri dimenzije prostora. Iako je izuzetno teško vizualizirati četiri dimenzije, možemo koristiti matematičke koncepte i alate kako bismo razumjeli svojstva četverodimenzionalne sfere.

U četverodimenzionalnom prostoru, sfera se sastoji od svih točaka koje su jednako udaljene od jednog centralnog "hipersredišta". Usporedno s trodimenzionalnom sferom, četverodimenzionalna sfera ima tri dimenzije površine i jednu dimenziju prostora.

Nažalost, zbog svoje četiri dimenzije, vrlo je teško vizualizirati četverodimenzionalnu sferu. No, možemo koristiti analogije i matematičke koncepte kako bismo je opisali. Na primjer, možemo zamisliti četverodimenzionalnu sferu kao objekt koji se kreće u četiri dimenzije, dok je njen oblik i svojstva teško pojmiti.

U matematičkom smislu, četverodimenzionalna sfera može se opisati kroz jednadžbu koja generalizira trodimenzionalnu sferu

6.2. Četverodimenzionalna kugla

6.2.1. Definicija i karakteristike četverodimenzionalne kugle

Definicija 11 : Četverodimenzionalna kugla je skup svih točaka u četverodimenzionalnom prostoru koje su manje ili jednako udaljene od jedne središnje točke koju nazivamo središte.

Četverodimenzionalna kugla je apstraktni geometrijski objekt koji se prostire kroz četiri dimenzije. Za razliku od trodimenzionalne kugle koja je ograničena na tri dimenzije (duljina, širina i visina), četverodimenzionalna kugla se proteže kroz četvrtu dimenziju. Ona predstavlja generalizaciju koncepta kugle u više dimenzija i otvara vrata za proučavanje prostora izvan našeg uobičajenog trodimenzionalnog iskustva.

Karakteristike četverodimenzionalne kugle su uvelike različite od svoje trodimenzionalne verzije. Dok se trodimenzionalna kugla može jednostavno opisati kao skup svih točaka jednako udaljenih od središta, četverodimenzionalna kugla zahtijeva matematičke formalizacije kako bi se precizno definirala. Jedna od karakteristika četverodimenzionalne kugle je njezina simetrija u odnosu na rotacije i transformacije u četiri dimenzije.

6.2.2. Matematički model četverodimenzionalne kugle

Matematički model četverodimenzionalne kugle može se izraziti kroz algebarske i geometrijske konstrukcije. Jedan pristup je korištenje vektora i koordinata u četverodimenzionalnom prostoru. Matematički model četverodimenzionalne kugle može se izraziti kroz jednadžbe koje opisuju njezinu strukturu i oblik.

Jedna od metoda za prikazivanje četverodimenzionalne kugle je korištenje projekcija na niže dimenzije koje su nam intuitivno razumljive, poput trodimenzionalnih projekcija. Ove projekcije mogu pomoći u vizualizaciji četverodimenzionalne kugle i razumijevanju njezine strukture.

6.2.3. Vizualizacija četverodimenzionalne kugle

Vizualizacija četverodimenzionalne kugle predstavlja izazov zbog naše ograničene sposobnosti percipiranja i vizualizacije više od tri dimenzije. Međutim, postoje tehnike koje nam mogu pomoći u stvaranju reprezentacija četverodimenzionalne kugle koje su intuitivnije.

Jedan pristup je korištenje animacija koje prikazuju promjene oblika i rotacije četverodimenzionalne kugle kroz vrijeme. Ove animacije mogu pružiti uvid u karakteristike četverodimenzionalne kugle i pomoći nam da zamislimo njezinu strukturu u našem trodimenzionalnom okruženju.

Dodatno, može se koristiti tehnika crtanja projekcija četverodimenzionalne kugle na dvodimenzionalne površine. Ove projekcije pružaju vizualne prikaze različitih presjeka i aspekata četverodimenzionalne kugle.

U ovom radu će se prikazati četverodimenzionalna kugla uz pomoć pythona.

"Python je programski jezik opće namjene, interpretiran i visoke razine kojeg je stvorio Guido van Rossum 1990. godine (prva javna inačica objavljena je u februaru 1991. godine), ime dobiva po televizijskoj seriji Monty Python's Flying Circus." [6]

"Šta je Python i koje su osnove njegove sintakse?". SvaFizika. Pristupljeno na: https://svafizika.org/2019/09/30/sta-je-python-i-koje-su-osnove-njegove-sintakse/ (pristupljeno 12.6.2023.)

6.3. Matematička formula za četverodimenzionalnu kuglu i četverodimenzionalnu sferu

Jednadžba četverodimenzionalne sfere u koordinatnom sustavu sa središtem u ishodištu je:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2 \tag{18}$$

Jednadžba četverodimenzionalne sfere u koordinatnom sustavu u četverodimenzionalnom prostoru je

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 + (x_4 - s_4)^2 = r^2 \tag{19}$$

Gdje je $S\ (s_1, s_2, s_3, s_4)$ središte kružnice, a r polumjer kružnice.

Primjer 6 : Provjeri je li točka (1, 2, 3, 4) unutar ili na rubu četverodimenzionalne sfere s centrom (5, 6, 7, 8) i polumjerom r = 10.

$$(1 - 5)^2 + (2 - 6)^2 + (3 - 7)^2 + (4 - 8)^2 = 10^2$$

$$(-4)^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + (-4)^2 = 100$$

$$16 + 16 + 16 + 16 = 100$$

$$64 + 64 = 100$$

$$128 = 100$$

Budući da uvjet nije ispunjen, točka (1, 2, 3, 4) se ne nalazi unutar ni na rubu četverodimenzionalne sfere s centrom (5, 6, 7, 8) i radijusom 10.

Jednadžba četverodimenzionalne kugle u koordinatnom sustavu sa središtem u ishodištu je:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq r^2 \tag{20}$$

Slijedeća formula predstavlja jednadžbu četverodimenzionalne kugle, odnosno hipersfere, u kojoj su $S(s_1, s_2, s_3, s_4)$ koordinate središta kugle, r je polumjer kugle, a (x_1, x_2, x_3, x_4) su koordinate točke na kugli.

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 + (x_4 - s_4)^2 \leq r^2 \tag{21}$$

Ova formula omogućava definiranje geometrijskih svojstava i svojstava udaljenosti u četverodimenzionalnom prostoru. Primjerice, ako su a $(x_1, x_2, x_3, x_4))$ koordinate točke koja zadovoljava tu jednadžbu, tada ta točka pripada hipersferi s centrom u točki $S(s_1, s_2, s_3, s_4)$ i polumjerom r.

Primjer 7: Ako su koordinate središta kugle (s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, 2, 3, 4) i polumjer (r) = 5, možemo provjeriti da li je točka (x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 2, 3, 4) na površini kugle prema jednadžbi

$$(6 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 4)^2 \leq 5^2$$

$$5^2 \leq 25$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj strani, možemo zaključiti da je točka (6, 2, 3, 4) na površini četverodimenzionalne kugle sa središtem (1, 2, 3, 4) i polumjerom 5.

Jednadžba kugle omogućava opisivanje oblika, veličine i položaja hipersfere u četverodimenzionalnom prostoru te se koristi u raznim matematičkim i fizikalnim kontekstima.

Površina hipersfere: Formula za izračunavanje površine hipersfere u četiri dimenzije je:

$$S = 2\pi^2 r^3 \tag{22}$$

Gdje je r polumjer hipersfere.

Volumen hipersfere: Volumen hipersfere u četiri dimenzije izračuna se pomoću formule:

$$V = (\frac{1}{2})\pi^2 r^4 \tag{23}$$

Gdje je r polumjer hipersfere.

Primjer 8:

Izračunaj volume hipersfere ako je polumjer 4 centimetra.

$$V = (\frac{1}{2})\pi^2 4^4$$

$$V = (\frac{1}{2})\pi^2 \times 256$$

$$V = 1263{,}31\ cm^4$$

6.4. Kod

Sljedeći kod služi za izračunavanje površine, volumena i provjere ako se određena točka nalazi na četverodimenzionalnoj kugli.

```
import math
import tkinter as tk

def calculate_volume(radius):
volume = (math.pi ** 2) * (radius ** 4) / 2
return volume

def calculate_surface_area(radius):
surface_area = 2 * (math.pi ** 2) * (radius ** 3)
return surface_area <=0

def calculate_formula(x, y, z, t, a, b, c, d, radius):
formula_result = (x - a) ** 2 + (y - b) ** 2 + (z - c) ** 2 + (t - d)
** 2 - (radius ** 2)
return formula_result
```

Kod 1. Formule
Izvor: Autor

Kod 1 ima upis formula po Kojima će program funkcionirati. Ima formulu za volumen, površinu i jednadžbu za izračunavanje da li je neka određena točka zaista na površini četverodimenzionalne kugle.

```
def calculate():
x = float(entry_x.get().replace("cm", ""))
y = float(entry_y.get().replace("cm", ""))
z = float(entry_z.get().replace("cm", ""))
t = float(entry_t.get().replace("cm", ""))
a = float(entry_a.get().replace("cm", ""))
```

```
b = float(entry_b.get().replace("cm", ""))
c = float(entry_c.get().replace("cm", ""))
d = float(entry_d.get().replace("cm", ""))
radius = float(entry_radius.get().replace("cm", ""))
```

Kod 2. Upis varijabli
Izvor: Autor

Kod 2 definira funkciju koja se koristi za izračunavanje vrijednosti za varijable x, y, z, t, a, b, c, d i radius. Vrijednosti se izvlače iz unosa u grafičkom sučelju.

```
volume = calculate_volume(radius)
surface_area = calculate_surface_area(radius)
formula_result = calculate_formula(x, y, z, t, a, b, c, d, radius)
```

Kod 3. Izračun i pohrana
Izvor: Autor

Nakon što su upisane vrijednosti za x, y, z, t, a, b, c, d i radius, kod 3 izračunava volumen, površinu sfere i rezultat formule.

```
entry_volume.configure(state="normal")
entry_surface.configure(state="normal")
entry_formula.configure(state="normal")

entry_volume.delete(0, tk.END)
entry_surface.delete(0, tk.END)
entry_formula.delete(0, tk.END)
entry_volume.insert(tk.END, str(volume) + " cm")
entry_surface.insert(tk.END, str(surface_area) + " cm")
```

```
entry_formula.insert(tk.END, str(formula_result))

entry_volume.configure(state="readonly")
entry_surface.configure(state="readonly")
entry_formula.configure(state="readonly")
```

Kod 4. Unosna polja
Izvor: Autor

Kod 4 prilagođava unosna polja kako bi prikazala izračunate vrijednosti volumena, površine i rezultata formule te onemogućuje daljnje uređivanje tih polja.

```
root = tk.Tk()
root.title("Cetverodimenzionalna kugla")
root.geometry("500x300")

frame_text = tk.Frame(root)
frame_text.pack(pady=10)
```

Kod 5. Grafičko sučelje
Izvor: Autor

Kod 5 postavlja temelje za grafičko sučelje aplikacije stvara glavni prozor i okvir koji će sadržavati tekstualne elemente.

```
label_text1 = tk.Label(frame_text, text="x, y, z, t su koordinate tocke na kugli")
label_text1.pack()

label_text2 = tk.Label(frame_text, text="a, b, c, d su koordinate centra kugle")
label_text2.pack()
```

```
label_text3 = tk.Label(frame_text, text="jednadzba za cetverodimenzionalnu sferu opisuje skup tocaka u cetverodimenzionalnom prostoru cije su udaljenosti od sredisa kugle (a, b, c, d) jednake radijusu (r).")
label_text3.pack()
```

Kod 6. Tekst za objašnjavanje
Izvor: Autor

Kod 6 dodaje tekstualne oznake unutar okvira koje objašnjavaju koordinate točke na kugli, koordinate centra kugle i jednadžbu za četverodimenzionalnu sferu.

```
frame_params = tk.Frame(root)
frame_params.pack(pady=10)

label_params = ["x (cm):", "y (cm):", "z (cm):", "t (cm):", "a (cm):", "b (cm):", "c (cm):", "d (cm):", "Radijus (cm):"]
entries_params = []
```

Kod 7. Dodavanje "cm"
Izvor: Autor

Kod 7 priprema okvir za unosna polja i definira oznake koje će se prikazati uz ta polja.

```
for i, label_text in enumerate(label_params):
label = tk.Label(frame_params, text=label_text)
label.grid(row=i, column=0, padx=5, pady=5)
entry = tk.Entry(frame_params)
entry.grid(row=i, column=1, padx=5, pady=5)
entries_params.append(entry)
```

Kod 8. Oznake i unosna polja
Izvor: Autor

Kod 8 stvara oznake i unosna polja za svaku koordinatu i radijus unutar okvira i dodaje unosna polja u listu radi daljnje upotrebe.

```
entry_x, entry_y, entry_z, entry_t, entry_a, entry_b, entry_c,
entry_d, entry_radius = entries_params

button_calculate = tk.Button(root, text="Izracunaj",
command=calculate)
button_calculate.pack(pady=10)

frame_results = tk.Frame(root)
frame_results.pack()
```

Kod 9. Stvaranje gumba
Izvor: Autor

Kod 9 stvara gumb za izračunavanje, definira varijable za pristup unesenim vrijednostima i stvara okvir za prikaz rezultata izračuna.

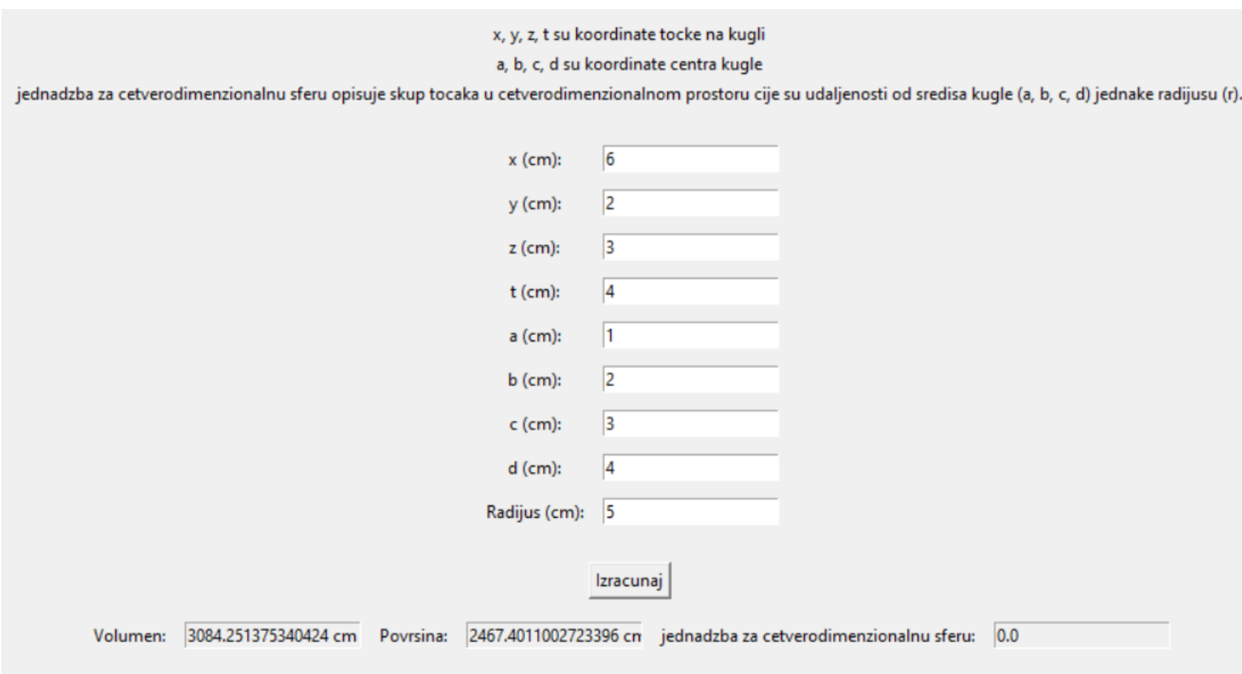
```
label_volume = tk.Label(frame_results, text="Volumen:")
label_volume.grid(row=0, column=0, padx=5, pady=5)

entry_volume = tk.Entry(frame_results, state="readonly")
entry_volume.grid(row=0, column=1, padx=5, pady=5)

label_surface = tk.Label(frame_results, text="Povrsina:")
label_surface.grid(row=0, column=2, padx=5, pady=5)

entry_surface = tk.Entry(frame_results, state="readonly")
entry_surface.grid(row=0, column=3, padx=5, pady=5)
```

```
label_formula = tk.Label(frame_results, text="jednadzba za
                cetverodimenzionalnu sferu:")
label_formula.grid(row=0, column=4, padx=5, pady=5)

entry_formula = tk.Entry(frame_results, state="readonly")
entry_formula.grid(row=0, column=5, padx=5, pady=5)

root.mainloop()
```

kod 10. Stvaranje okvira za rezultate

Izvor: Autor

Kod 10. Stvara određene okvira u Kojima se upisuje rezultat jednadžbi i onemogućuje uređivanje toga rezultata.



Slika 18. Rezultat koda (Grafičko sučelje)

Izvor : Autor

7. ZAKLJUČAK

Četverodimenzionalna kugla je apstraktan koncept koji postoji u četverodimenzionalnom prostoru. Iako je teško vizualizirati takvu kuglu u našem trodimenzionalnom svijetu, njezina analiza pomaže u razumijevanju složenijih koncepta i modeliranju prostora u višim dimenzijama. Četverodimenzionalna kugla se koristi u matematičkim istraživanjima i teorijama kako bi se bolje razumjela četverodimenzionalna geometrija. Koordinatni sustav omogućuje opisivanje položaja točaka u različitim prostornim dimenzijama. Kartezijev koordinatni sustav je osnova za analitičku geometriju, koja omogućuje matematičko opisivanje geometrijskih objekata i primjenu matematičkih operacija na njih. U trodimenzionalnom prostoru koristimo koordinatni sustav s tri osi (x, y, z), dok se u četverodimenzionalnom prostoru dodaje četvrta os. Udaljenost između točaka može se izračunati pomoću različitih formula, ovisno o broju dimenzija u prostoru. U dvodimenzionalnom prostoru koristimo Pitagorin poučak, a u četverodimenzionalnom prostoru koristimo Minkowskogov prostor i interval između točaka. Kružnica je jedan od osnovnih geometrijskih oblika koja se koristi u matematici. Ona se definira kao skup točaka koje su jednako udaljene od središta. Kružnica ima mnogo svojstava i matematičkih formula koje se koriste u različitim disciplinama. Krug je jako sličan kružnici i po svojim formulama i obliku ali i dalje ima malih razlika. Pričali smo još i o kugli i sferi koje također imaju puno zajedničkih formula i pomažu nam s razumijevanjem trodimenzionalnog prostora. Sve ove matematičke i geometrijske koncepte koriste matematičari, znanstvenici i inženjeri u raznim područjima istraživanja i primjene, kao što su fizika, računalna grafika, teorija relativnosti i mnogi drugi. Uz pomoć ovih koncepta možemo bolje razumjeti geometriju u višim dimenzijama i primijeniti ih u proučavanju i analizi prostora, kao i u raznim praktičnim situacijama.

8. LITERATURA

[1] Frankel, R. (2020). Four-Dimensional Art. [Online] Pristupljeno na: https://groups.csail.mit.edu/mac/users/rfrankel/fourd/FourDArt.html. (pristupljeno 04.05.2023.)

[2] “Koordinatni sustav” Hrvatska enciklopedija [Online] Pristupljeno na: https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=33043. (pristupljeno 04.05 2023.)

[3] “Koordinatizacija prostora” Mathematicsdigital [Online] Pristupljeno na:

http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node55.html

(pristupljeno 06.06.2023.)

[4] “Kružnica i krug” IZZI digital [Online] Pristupljeno na:

https://hr.izzi.digital/DOS/204/264.html (pristupljeno 11.05.2023.)

[5]”Kugla” Hrvatska enciklopedija [Online] Pristupljeno na:

https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=34437 (pristupljeno 11.05.2023)

[6] "Šta je Python i koje su osnove njegove sintakse?". SvaFizika. [Online]Pristupljeno na: https://svafizika.org/2019/09/30/sta-je-python-i-koje-su-osnove-njegove-sintakse/ (pristupljeno 12.6.2023.)

[7]”Exotic spheres” plus maths [Online] Pristupljeno na:

https://plus.maths.org/content/richard-elwes (pristupljeno 06.06.2023.)

[8] the surface area are and the volume of n-dimensional sphere , spring semester 2017 pristupljeno na: https://www.phys.uconn.edu/~rozman/Courses/P2400_17S/downloads/nsphere.pdf (pristupljeno 05.07.2023)