Četverodimenzionalna kocka

Bočkal, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Polytechnic of Međimurje in Čakovec / Međimursko veleučilište u Čakovcu**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:110:599699

MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU

STRUČNI STUDIJ RAČUNARSTVO

Ivan Bočkal

ČETVERODIMENZIONALNA KOCKA

ZAVRŠNI RAD

Čakovec, 2022.

MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU

STRUČNI STUDIJ RAČUNARSTVO

Ivan Bočkal

ČETVERODIMENZIONALNA KOCKA

FOUR-DIMENSIONAL CUBE

ZAVRŠNI RAD

Mentor: prof. Tibor Rodiger

Čakovec, 2022.

ZAHVALA

Zahvaljujem svima koji su mi bili podrška za vrijeme studija, a ponajprije zahvaljujem svojem mentoru prof. Tiboru Rodigeru na velikoj pomoći i strpljenju tijekom pisanja završnog rada. Zahvaljujem svojoj obitelji jer su mi pružali podršku u svakom trenutku, svojim prijateljima, prijateljicama, kolegama i kolegicama te svim profesorima na Međimurskom veleučilištu za stečeno znanje koje će mi uvelike pomoći u daljnjem životu.

Ivan Bočkal

SAŽETAK

U ovom završnom radu naslovljenom *Četverodimenzionalna kocka* opisano je što su to dimenzije i kako funkcioniraju u koordinatnim sustavima. Poznato je da točka nema nijednu od tri dimenzije (širina, duljina, visina), pravac je jednodimenzionalan, što znači da ima samo duljinu, ravnina ima duljinu i širinu, a prostor sadržava sve tri dimenizije. Dimenzije je najlakše prikazati s pomoću Kartezijevog koordinatnog sustava. Kartezijev koordinatni sustav sastoji se od tri međusobno okomita pravca koji se sijeku u ishodištu. Osi koordinatnog sustava nazivaju se apscisa (na osi x), ordinata (na osi y) i aplikata (na osi z). U četverodimenzionalnom sustavu dodajemo još jednu os koja je okomita na preostale tri. Nakon opisivanja dimenzija, opisano je kako se računa udaljenost točaka u ravnini, u prostoru te u višedimenzionalnom prostoru, što je u ovom slučaju prostor s četiri dimenzije. Formula za računanje udaljenosti točaka dobije se iz formule Pitagorina poučka. Objašnjeni su matematički izrazi volumen i oplošje, prikazano je kako se označavaju u matematici, te su prikazane formule i primjeri zadataka za računanje volumena i oplošja kocke i kvadrata. Na kraju, opisano je kako se iz obične kocke formira četverodimenzionalna kocka i od čega se ona sastoji. Na primjerima sa slikama prikazani su vrhovi, bridovi, dvodimenzionalna i trodimenzionalna lica četverodimenzionalne kocke. Dvodimenzionalna lica četverodimenzionalne kocke zapravo su kvadrati, a trodimenzionalna lica su kocke. Ispisani su svi vrhovi, bridovi, trodimenzionalna lica i četverodimenzionalna lica, a za vrhove su ispisane i koordinate točaka u koordinatnom sustavu. Prikazane su formule za računanje volumena i oplošja četverodimenzionalne kocke, te je na primjerima prikazano kako to izgleda kod rješavanja zadataka. Kao što postoje formule za dijagonale kvadrata i obične kocke, na sličan način računa se i dijagonala četverodimenzionalne kocke, što je također prikazano na primjeru. Objašnjeno je u kakvom su međusobnom odnosu vrhovi dijagonala četverodimenzionalne kocke, koliko njihove točke imaju istih koordinata, a koliko različitih.

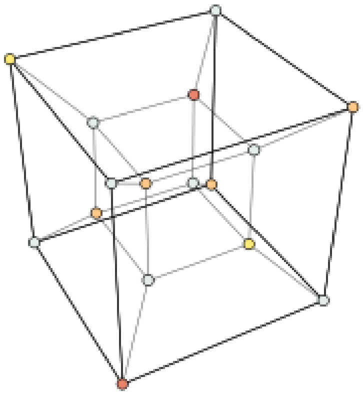
Ključne riječi: *Četverodimenzionalna kocka, dimenzija, Kartezijev koordinatni sustav, volumen, oplošje, dijagonale*

Sadržaj

Popis slika:

1. UVOD

Četverodimenzionalna kocka generalizacija je klasične kocke u četiri dimenzije. Riječ je o četverodimenzionalnoj hiperkocki koja se naziva teserakt. Teserakt se odnosi prema kocki kao kocka prema kvadratu. Posjeduje 16 vrhova, 32 brida jednake duljine, 24 kvadrata omeđene s 8 stranica u obliku kocke. Formira se iz obične kocke dodavanjem četvrte koordinate.

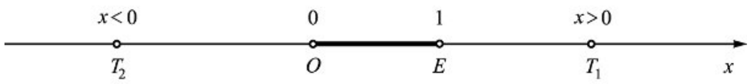


Slika 1. Četverodimenzionalna kocka

Izvor: https://vorosh-bib.ru/hr/les-miserables/chetyr-hmernyi-kub-tesserakt-i-voobshche-n-mernye-kuby-vrashchenie-chetyrehmernogo-kuba/ (19.04.2022.)

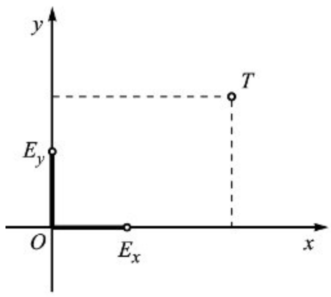
2. KOORDINATNI SUSTAV

Koordinatni sustavi omogućuju da se neke točke na pravcu, plohi, u ravnini ili u prostoru opišu brojevima, a takve brojeve nazivamo koordinate. Koordinatni sustav dobio je ime po Renéu Descartesu koji je koordinatni sustav otkrio u prvoj polovici 17. stoljeća, pa se zato i zove Kartezijev koordinatni sustav. Otkriće Kartezijeva koordinatnog sustava omogućilo je da se mnogi geometrijski oblici sustavno proučavaju metodama analitičke geometrije, analize i algebre. Postoji više vrsta koordinatnih sustava, a neki od njih su: koordinatni sustav na pravcu, u ravnini, u prostoru, kosokutni i polarni.



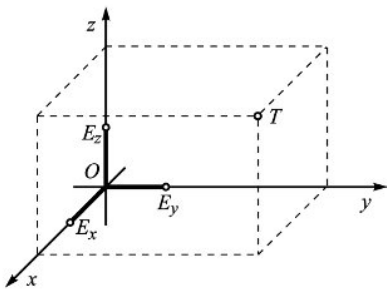
Slika 2. Koordinatni sustav na pravcu

Izvor: www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=33043 (16.07.2022.)



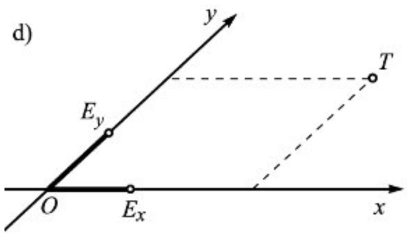
Slika 3. Koordinatni sustav u ravnini

Izvor: www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=33043 (16.07.2022.)



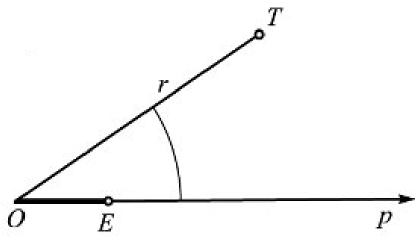
Slika 4. Koordinatni sustav u prostoru

Izvor: www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=33043 (16.07.2022.)



Slika 5. Kosokutni koordinatni sustav

Izvor: www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=33043 (16.07.2022.)



Slika 6. Polarni koordinatni sustav

Izvor: www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=33043 (16.07.2022.)

2.1. Dimenzija

Dimenzija je obilježje prostora koje identificira prostor i objekte u nekom prostoru. To je minimalan broj realnih parametara koji su potrebni da bi se opisao položaj neke točke u danom prostoru. U matematici dimenzije stvaraju koordinatni sustav. Pojam dimenzije u matematici se pojavljivao intuitivno od početka razvoja geometrije. Različite dimenzije predstavljaju različite pojmove. Prvi je primjer točka koja je shvaćena kao objekt nulte dimenzije. Pravac ima jednu dimenziju, ravnine i plohe su dvodimenzionalne, a tijela su u prostoru trodimenzionalna. Primjer četvrte dimenzije je Teserakt (četverodimenzionalna kocka). Ako je dimenzija n, točka u zadanom prostoru je određena s n koordinata u odnosu prema danoj bazi. Dimenzija ima više definicija, ali sve se zasnivaju na nekim svojstvima pravaca, ravnine i prostora.

Definicija 1.

„Dimenzija prostora maksimalan je broj linearno-nezavisnih vektora u tome prostoru." [4]

2.2. Točka – nulta dimenzija

Točka, pravac, ravnina, prostor i skup osnovni su matematički pojmovi i za njih ne postoji definicija.

Za točku u matematici možemo reći da je apstraktni objekt u nekom prostoru koji ima samo koordinate, a drugih mjerljivih obilježja zapravo nema. Tada je točka objekt kojem možemo odrediti samo položaj, a nema duljine i visine. Točka se ne dijeli na manje dijelove i osnovni je objekt bilo koje dimenzije. Kada točku stavimo u koordinatni sustav, nju označavamo velikim slovom. Točku u koordinatnom sustavu označavamo velikim slovom, a njezine koordinate prikazuju se uređenom *n*-torkom.

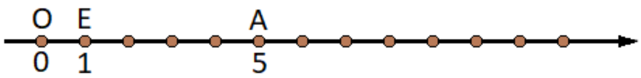
2.3. Koordinatni sustav na pravcu

Pravac je osnovni geometrijski pojam koji se ne definira. Sadržava jednu dimenziju, a to je duljina. Pravac se intuitivno objašnjava kao neomeđena ravna crta u ravnini. Koordinatizacijom sustava pojednostavljujemo rad s vektorima, a koordinatizacija pravca je:

Definicija 2.

„Odaberemo pravac *p* kroz točku $\mathrm{O} \in \varepsilon$ te na njemu nanesemo brojevni pravac tako da je nula u točki O. Jedinični vektor $\boldsymbol{i}$ definiramo kao $\mathbf{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$, pri čemu je broju 1 brojevnog pravca pridružena točka I. Vektor $\boldsymbol{i}$ je jednoznačno određen i vrijedi $\mathrm{d}(\mathrm{O}, \mathrm{I}) = |\mathrm{i}| = 1$." [5]

Kako bismo definirali koordinatni sustav na pravcu, potrebno je odrediti točke O i E, pri čemu točku O definiramo kao ishodište, dok dužinu OE definiramo kao jediničnu dužinu. Točki E pridružuje se koordinata 1, te zapisujemo E(1). S pomoću te jedinične dužine određuju se koordinate ostalih točaka na pravcu.

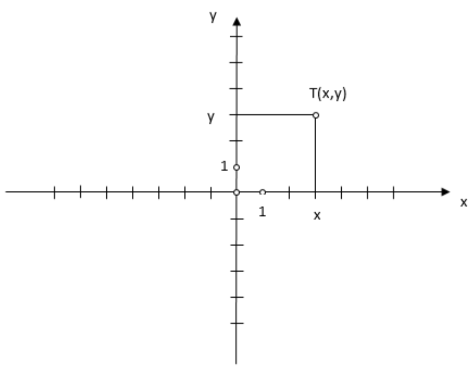


Slika 7. Brojevni pravac

Izvor: autor

2.4. Koordinatni sustav u ravnini

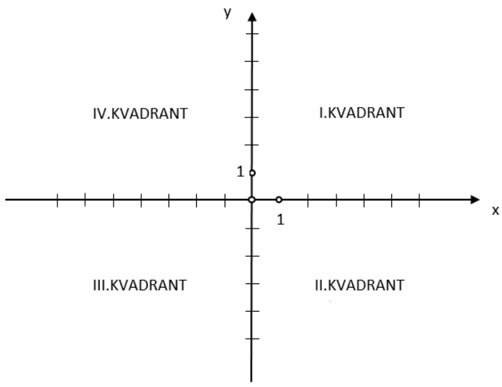
Ravnina je jedan od osnovnih pojmova u geometriji. Intuitivno se objašnjava kao dvodimenzionalna ravna površina koja je beskonačno velika i koja nema debljinu. Sadržava dvije dimenzije, koje se najčešće nazivaju širina i duljina. Kao primjer ravnine možemo uzeti običan list papira. Koordinatni sustav u ravnini određuju dva međusobno okomita brojevna pravca koja nazivamo koordinatne osi. Horizontalnu os nazivamo os x ili os apscisa. Vertikalnu os nazivamo os y ili os ordinata. Sjecište koordinatnih osi nazivamo ishodište koordinatnog sustava. Kažemo da su (x, y) koordinate točke T i pišemo T(x, y). Broj x nazivamo apscisa točke T, a broj y je ordinata točke T.



Slika 8. Točka u kooordinatnom sustavu u ravnini

Izvor: autor

Osi koordinatnog sustava dijele ravninu na četiri beskonačno velika dijela koji se nazivaju kvadranti, od kojih je svaki omeđen s dvije odgovarajuće osi i naznačen rimskim brojevima od I do IV.



Slika 9. Kvadranti u koordinatnom sustavu

Izvor: autor

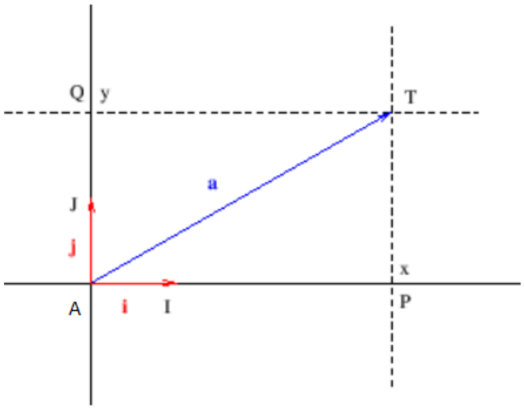
Kao što se definira koordinatizacija sustava na pravcu, na sličan način definira se i koordinatizacija sustava u ravnini.

Definicija 3.

„U ravnini ρ koja se nalazi u prostoru ε prvo odaberemo točku *O* kao ishodište. Zatim odaberemo međusobno okomite pravce *p* i *q* koji leže u ravnini ρ i prolaze kroz točku *O.* Na pravcima *p* i *q* definiramo koordinatne sustave (O, ***i***) i (O, ***j***), redom, pri čemu je:

$$\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \boldsymbol{j} = \overrightarrow{OJ}, \quad |\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = 1.$$

Točke ***I*** i ***J*** su odabrane tako da rotacijom oko točke *O* za kut π/2 u pozitivnom smjeru, odnosno suprotno od kazaljke na satu, prelazi u točku ***J***. S ovim smo u ravnini ρ zadali desni pravokutni (ortogonalni) koordinatni sustav (*O*, ***i, j***).” [6]



Slika 10. Koordinatizacija ravnine

Izvor: http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node54.html (04.09.2022.)

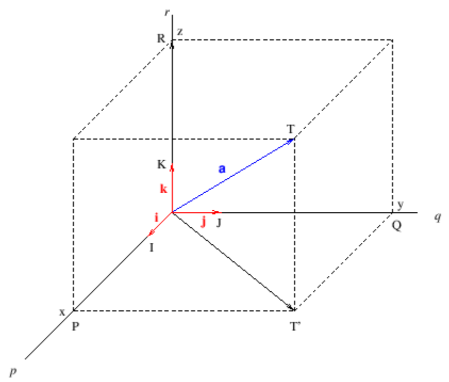
2.5. Koordinatni sustav u prostoru

Prema koordinatizaciji ravnine, na sličan način glasi definicija koordinatizacije prostora.

Definicija 4.

„Prvo odaberemo ishodište *O* i međusobno okomite pravce *p*, *q* i *r* koji prolaze kroz točku *O*. U ravnini razapetoj s pravcima *p* i *q* definiramo desni pravokutni koordinatni sustav (O, ***i***, ***j***). Potom na pravcu r definiramo koordinatni sustav (O, ***k***), tako da vektori ***i***, ***j*** i ***k*** zadovoljavaju pravilo desnog vijka. Time smo definirali desni pravokutni koordinatni sustav (O, ***i***, ***j***, ***k***) u prostoru. Pri tome vrijedi:

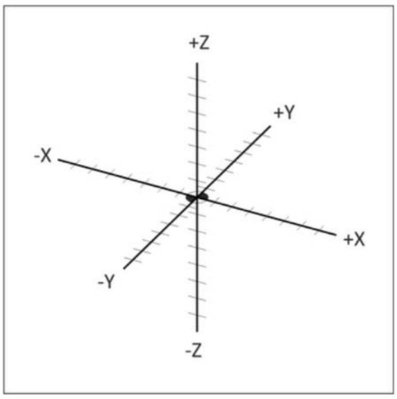
$$i = \overrightarrow{OI}, \quad j = \overrightarrow{OJ}, \quad k = \overrightarrow{OK}, \qquad |i| = |j| = |k| = 1.\text{” [7]}$$



Slika 11. Koordinatizacija prostora

Izvor: www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node54.html (04.09.2022.)

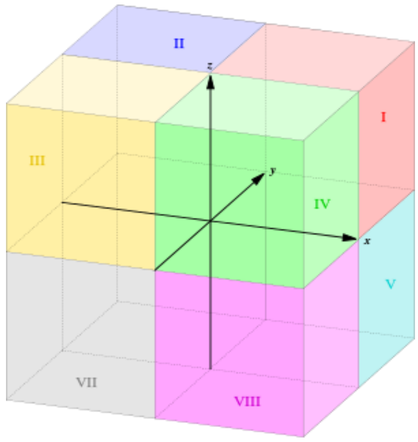
Kartezijev koordinatni sustav u prostoru čine tri međusobno okomita pravca *x*, *y* i *z* koji se sijeku u jednoj točki koju nazivamo ishodište. Koordinate se tada nazivaju apscisa (na osi *x*), ordinata (na osi *y*) i aplikata (na osi *z*). Koordinate točke u takvom sustavu zadane su uređenom trojkom brojeva, na primjer: A(2, –3, 6), gdje su koordinate predstavljene orijentiranim okomitim udaljenostima od neke točke do odgovarajuće ravnine. Takav koordinatni sustav dijeli prostor na osam područja, tzv. ‘oktanata’, omeđenih s odgovarajućim dijelovima ravnina. Prvi oktant je tamo gdje su sve tri poluosi pozitivne.



Slika 12. Osi 3D koordinatnog sustava

Izvor: https://cnc.com.hr/ (19.07.2022.)

Sljedeća slika prikazuje raspored oktanata u trodimenzionalnom koordinatnom sustavu.



Slika 13. Raspored oktanata u 3D sustavu

Izvor: http://hr.swewe.net/ (20.07.2022.)

2.6. Četverodimenzionalni koordinatni sustav

Četverodimenzionalni prostor vrlo je teško zamisliti, ali on se matematički može opisati. Način na koji smo izveli koordinatizaciju sustava u prostoru, sličan je kao i u slučaju koordinatizacije četverodimenzionalnog prostora.

Definicija 5.

Prvo odaberemo ishodište *O* i međusobno okomite pravce *p*, *q*, *r* i *s* koji prolaze kroz točku *O*. U ravnini razapetoj s pravcima *p*, *q* i *r* definiramo desni pravokutni koordinatni sustav (O, ***i***, ***j***, ***k***). Potom na pravcu r definiramo koordinatni sustav (O, ***l***), tako da vektori ***i***, ***j***, ***k***, ***l*** zadovoljavaju pravilo desnog vijka. Time smo definirali desni pravokutni koordinatni sustav (O, ***i***, ***j***, ***k***, ***l***) u prostoru. Pri tome vrijedi:

$$i = \overrightarrow{OI}, \quad j = \overrightarrow{OJ}, \quad k = \overrightarrow{OK}, \quad l = \overrightarrow{OL}, \quad |i| = |j| = |k| = |l| = 1.$$

Analogno tome kako smo iz koordinatnog sustava u ravnini dvije dimenzije prešli u koordinatni sustav u prostoru, tj. tri dimenzije, tako ćemo i iz koordinatnog sustava u prostoru, tj. tri dimenzije, preći u koordinatni sustav u četverodimenzionalnom prostoru. Kako smo prije imali tri međusobno okomita pravca koja se sijeku u jednoj točki, tako u četverodimenzionalnom prostoru imamo četiri međusobno okomita pravca koji se sijeku u jednoj točki. Koordinate točke u tom sustavu označuju se uređenim četvorkama brojeva, na primjer: A (2, 2, –1, –3), B (2, –2, 3, 1), C (–1, –2, 1, 3) i D (–2, 3, –1, 3). Kao što u ravnini koordinate dijele ravninu na četiri kvadranta, kao što u prostoru tri koordinatne osi dijele prostor na 8 oktanata, tako i četiri pravca u četverodimenzionalnom prostoru dijele prostor na 16 dijelova. Četverodimenzionalni prostor vrlo je teško zamisliti, ali on se matematički može opisati.

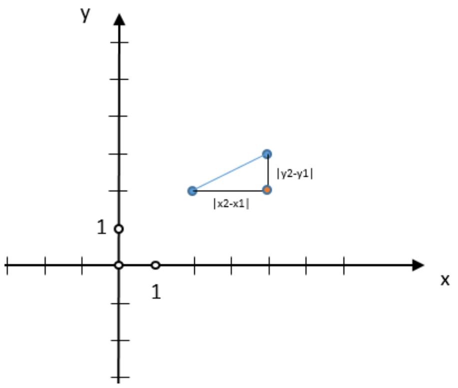
2.7. Udaljenost dviju točaka

Udaljenost točaka računa se kao modul vektora koji čine neke točke u koordinatnom sustavu. Ako računamo udaljenost točaka koje su dvodimenzionalne, onda će korijen sadržavati samo dva člana, a ako točke kojima računamo udaljenost imaju četiri dimenzije, onda će ispod korijena biti četiri člana. Dakle, duljina korijena ovisi o tome koliko će zadane točke imati dimenzija. Važno je napomenuti da vektor koji ide od točke A do točke B nije isto što i drugi vektor koji ide od točke B do točke A. Stoga je bitno da se točke poredaju jer je važan redoslijed čimbenika.

Primjer formule za računanje udaljenosti dviju točaka ako točke imaju samo dvije dimenzije je:

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

2.7.1. Udaljenost točaka u ravnini



Slika 14. Udaljenost točaka u ravnini

Izvor: autor

Udaljenost između točaka označavamo malim slovom *d* i za računanje se koristimo Pitagorinim poučkom čija formula glasi:

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{2}$$

Označavanje koordinata točaka prikazujemo kao X_a, Y_a, X_b, Y_b. X_a tada predstavlja koordinatu točke a na osi *x*, a Y_a predstavlja koordinatu točke a na osi *y*. Isto tako vrijedi i za točku b. Horizontalni razmak između točaka je tada $X_b – X_a$, a vertikalni razmak je $Y_b – Y_a$. Kada to upotrijebimo kroz formulu Pitagorina poučka, to izgleda ovako:

$$d(A,B)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \tag{3}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{4}$$

Primjer 1.

Točke u ravnini sadržavaju dvije dimenzije, a ako imamo zadano da je točka A (2, 2), a točka B (4, 3), onda računamo sljedeće:

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(4-2)^2 + (3-2)^2}$$

$$=\sqrt{4+1}$$

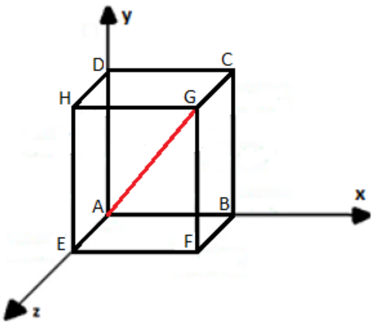
$$=\sqrt{5}$$

$$\approx 2.24$$

Rezultat koji na kraju dobijemo udaljenost je između točke A i točke B.

2.7.2 Udaljenost točaka u prostoru

Kada govorimo o udaljenosti točaka u prostoru, koristimo se Pitagorinim poučkom koji se primjenjuje kod prostorne dijagonale kvadra.



Slika 15. Dijagonala kvadra

Izvor: autor

Primjenjujući formulu za prostornu dijagonalu kvadra:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

dobivamo formulu za udaljenost točaka u prostoru.

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (5)$$

Primjer 2.

Neka su zadane točke A (2, –1, 3) i točka B (–2, 1, 4), udaljenost računamo prema formuli:

$$d(AB) = \sqrt{(-2-2)^2 + (1+1)^2 + (4-3)^2}$$

$$=\sqrt{16+1+1}$$

$$=\sqrt{18}$$

$$\approx 4.24.$$

2.7.3. Udaljenost točaka u četverodimenzionalnom prostoru

Na primjerima jednodimenzionalnog, dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog prostora, možemo zaključiti da se udaljenost točaka može izračunati i u višedimenzionalnim prostorima, no to je vrlo teško vizualno zamisliti. Kod četverodimenzionalnog sustava koordinate točaka su uređene četvorke brojeva (x, y, z, q) i prema tome formula za izračun udaljenosti sastoji se od četiri komponente. Analogno formulama (4) i (5) dobivamo formulu za udaljenost točaka u četverodimenzionalnom koordinatnom sustavu:

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (q_2 - q_1)^2}. \tag{6}$$

Primjer 3.

Ako imamo zadane koordinate točke A (2, 1, –3, 2) i koordinate točke B (–1, 3, 4, 1), formula za računanje udaljenosti je:

$$d(AB) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (4 - 3)^2 + (1 - 2)^2}.$$

$$= \sqrt{9 + 4 + 1 + 1}$$

$$= \sqrt{15}$$

$$\approx 3.87.$$

3. OPLOŠJE

Oplošje je zbroj površina svih strana kojima je neko tijelo omeđeno. Kada je riječ o kocki, tada je oplošje zbroj površina njezinih stranica, a označava se velikim slovom O. Kocka ima šest jednakih stranica pa tako formula za oplošje kocke izgleda ovako:

$$O = 6a^2 \tag{7}$$

gdje je *a* duljina brida kocke.

4. VOLUMEN

Volumen ili obujam fizička je veličina koja nam prikazuje koliko neka tijela zauzimaju prostora. Mjerna jedinica za volumen je kubni metar (m^3), a označavamo ga velikim slovom V. Najlakši primjer računanja volumena bit će na primjeru kocke koja ima sve bridove veličine jednog metra. Tada je formula za računanje:

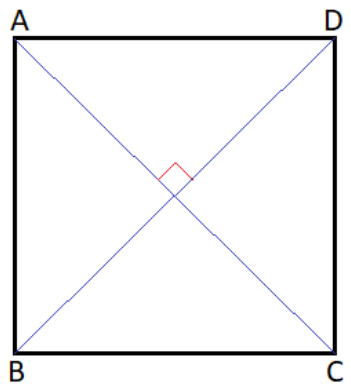
$$V = a^{3.} \tag{8}$$

gdje je a duljina brida kocke.

„Mjera obujma geometrijskog tijela jest broj koji je u slučaju kocke stranice a jednak a^3, u slučaju kvadra sa stranicama a, b, c jednak je abc itd. Jedinicu mjere obujma ima kocka čija stranica ima jediničnu duljinu. Može se reći da je obujam u slučaju geometrijskih tijela analogan duljini u slučaju crta i površini u slučaju geometrijskih likova." [7]

5. KVADRAT

Kvadrat je četverokut koji sadržava četiri prava kuta i četiri sukladne stranice, a sve stranice su mu jednake duljine i nasuprotne stranice paralelne. Dijagonale kvadrata sijeku se pod pravim kutom. Kvadrat sadržava dvije dimenzije, a to su duljina i širina. To je geometrijski lik što znači da se nalazi u ravnini, tj. da je dvodimenzionalno tijelo, a možemo ga definirati na nekoliko načina. Kvadrat ima 4 vrha, vrhovi su mu točke, tj. nulta dimenzija, ima 4 stranice, prva dimenzija, jednu plohu.



Slika 16. Kvadrat

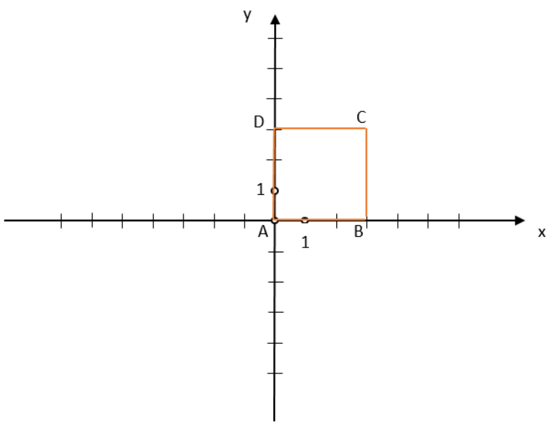
Izvor: autor

Kvadratu kao dvodimenzionalnom tijelu računamo opseg i površinu. Opseg je zbroj duljina svih stranica, tj. pojam koji računa jednodimenzionalnu varijablu. Površina kvadrata je fizička veličina i opisuje veličinu plohe tijela i ona računa dvodimenzionalnu varijablu. Kod računanja površine i opsega kvadrata upotrebljavamo sljedeće formule gdje je a duljina stranice. Površinu označavamo velikim slovom P, a opseg velikim slovom O.

$$P = a^2 \tag{9}$$

$$O = 4a \tag{10}$$

Budući da je kvadrat dvodimenzionalan, možemo ga staviti najmanje u koordinatni sustav u ravnini.



Slika 17. Kvadrat u koordinatnom sustavu

Izvor: autor

Najjednostavniji način je da točku A stavimo u ishodište koordinatnog sustava, a njoj susjedne vrhove na koordinatne osi. Tako ćemo dobiti koordinate vrhova koji se sastoje od 0 i duljine stranica. Vrhovi kvadrata na slici 17. definirani su koordinatama A (0, 0), B (3, 0), C (3, 3) i D (0, 3). Primijetimo da susjedni vrhovi imaju jednu koordinatu jednaku, a drugu različitu. Vrhovi dijagonala imaju obje koordinate različite. Kada računamo dijagonalu kvadrata d koji ima duljinu stranice a, formula za dijagonalu glasi:

$$d = a\sqrt{2}. \tag{11}$$

Izvod formule iz Pitagorina poučka:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2 /\sqrt{}$$

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$d = \sqrt{2}\sqrt{a^2}$$

$$d = a\sqrt{2}.$$

Primjer 4.

Dijagonala kvadrata prikazanog na gornjoj slici koji ima duljinu stranice 3 iznosi:

$$d = 3\sqrt{2}$$

$$d \approx 4.24.$$

Dijagonalu zadanog kvadrata možemo izračunati s pomoću formule za udaljenost točaka u ravnini.

Primjer 5.

Ako imamo zadane koordinate točaka A (0, 0) i B (3, 3), formula je:

$$d = d(AC) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = d(AC) = \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2}$$

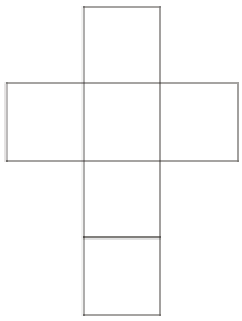
$$d(AC) = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$d(AC) = 3\sqrt{2}$$

$$d(AC) \approx 4.24.$$

6. KOCKA

Osnovna definicija kocke je da je ona geometrijsko tijelo i jedna je od Platonovih tijela. Platonova su tijela poliedri kojima su strane pravilni i međusobno jednaki višekuti, a svi kutovi su jednaki. Postoji ukupno pet takvih tijela: tetraedar – omeđen s četiri jednakostranična trokuta, kocka – omeđena sa šest kvadrata, oktaedar – omeđen s osam jednakostraničnih trokuta, dodekaedar – omeđen s dvanaest pravilnih peterokuta i ikosaedar – omeđen s dvadeset jednakostraničnih trokuta. Kocka je pravilna četverostrana prizma koja se sastoji od šest jednakih kvadrata (njezinih stranica), te sadržava dvanaest bridova i osam vrhova.



Slika 18. Mreža kocke

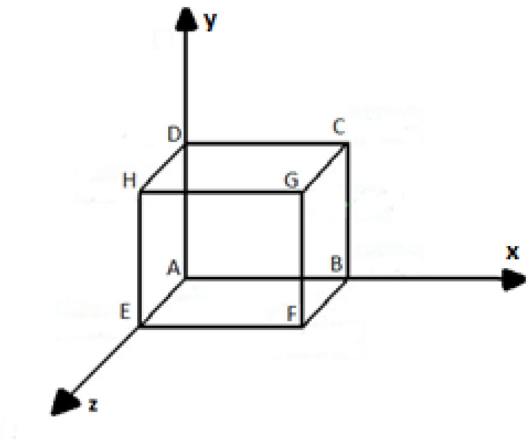
Izvor: autor

Kocka je geometrijsko tijelo što znači da se nalazi u trodimenzionalnom prostoru. Ima osam vrhova, dvanaest bridova, i šest dvodimenzionalnih ploha. Kao što za kvadrat računamo opseg i površinu, tako slično možemo računati opseg i oplošje kocke. Kod računanja volumena i oplošja kocke upotrebljavamo sljedeće formule, gdje je a duljina brida kocke. Volumen kocke označavamo velikim slovom V, a oplošje označavamo velikim slovom O.

$$V = a^3 \tag{12}$$

$$O = 6a^2 \tag{13}$$

Kocku možemo prezentirati i u koordinatnom sustavu.



Slika 19. Kocka u koordinatnom sustavu

Izvor: autor

Najjednostavniji način je da točku A stavimo u ishodište koordinatnog sustava, a njoj susjedne vrhove na koordinatne osi. Tako ćemo dobiti koordinate vrhova koji se sastoje od 0 i duljine stranica.

Kocka duljine stranice 1 sadržava osam vrhova koji su određeni koordinatama A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), C (1, 1, 0) D (0, 1, 0), E (0, 0, 1), F (1, 0, 1), G (1, 1, 1) i H (0, 1, 1). Prvi broj u zagradi predstavlja koordinatu na osi *x*, drugi na osi *y* i treći predstavlja koordinatu na osi *z*.

Primijetimo da susjedni vrhovi kocke imaju dvije iste koordinate, a jednu različitu. Vrhovi plošnih dijagonala imaju jednu koordinatu jednaku, a dvije različite. Vrhovi prostornih dijagonala imaju sve koordinate različite.

Kocka sadržava 12 bridova, a svi bridovi su jednake duljine. Bridovi kocke su $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HE}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ i $\overline{DH}$. Bridovi kocke koji se spajaju u jednom njezinom vrhu međusobno su okomiti.

Koordinate bridova kocke na primjeru slike 19.:

$$\overline{AB} - \mathrm{A}\ (0,0,0), \mathrm{B}\ (1,0,0)$$
$$\overline{BC} - B\ (1,0,0), C\ (1,1,0)$$
$$\overline{CD} - C\ (1,1,0), D\ (0,1,0)$$
$$\overline{DA} - D\ (0,1,0), A\ (0,0,0)$$
$$\overline{EF} - E\ (0,0,1), F\ (1,0,1)$$
$$\overline{FG} - F\ (1,0,1), G\ (1,1,1)$$

$$\overline{GH} - G\ (1,1,1), H\ \ (0,1,1)$$
$$\overline{HE} - H\ (0,1,1), E\ (0,0,1)$$
$$\overline{AE} - A\ (0,0,0), E\ (0,0,1)$$
$$\overline{BF} - B\ (1,0,0), F\ (1,0,1)$$
$$\overline{CG} - C\ (1,1,0), G\ (1,1,1)$$
$$\overline{DH} - D\ (0,1,0), H\ (0,1,1).$$

Stranice kocke su: ABCD, EFGH, FBCG, BCDA, ADHE i AEBF. Bilo koja stranica kocke može predstavljati bazu. U ovom slučaju baze ABFE i DCGH i pobočke FBCG, BCDA, ADHE, EFGH sukladni su kvadrati. Sve susjedne stranice kocke međusobno su okomite, npr. stranica AEBF je okomita na stranicu FBCG, a parovi nasuprotnih stranica kocke su paralelni. Primjer paralelnosti su stranica EFGH i stranica ABCD.

Koordinate stranica kocke na primjeru slike 19:

$$ABCD - A\ (0,0,0), B\ (1,0,0), C\ (1,1,0), D\ (0,1,0)$$
$$EFGH - E\ (0,0,1), F\ (1,0,1), G\ (1,1,1), H\ (0,1,1)$$
$$FBCG - F\ (1,0,1), B\ (1,0,0), C\ (1,1,0), G\ (1,1,1)$$
$$BCDA - B\ (1,0,0), C\ (1,1,0), D\ (0,1,0), A\ (0,0,0)$$
$$ADHE - A\ (0,0,0), D\ (0,1,0), H\ (0,1,1), E\ (0,0,1)$$
$$AEBF - A\ (0,0,0), E\ (0,0,1), B\ (1,0,0), F\ (1,0,1).$$

Prostorna je dijagonala kocke hipotenuza pravokutnog trokuta i spaja dva nasuprotna vrha koji nisu na istoj strani kocke, označava se velikim slovom D. Jedna je kateta plošna dijagonala, a druga je kateta brid kocke. Plošna dijagonala kocke zapravo je dijagonala kvadrata i također se označava malim slovom *d* kao i kod kvadrata. Formula za prostornu dijagonalu kocke prema Pitagorinu poučku glasi:

$$D = \mathrm{a}\sqrt{3}. \tag{14}$$

Izvod formule prema Pitagorinu poučku:

$$D^2 = a^2 + d^2$$

$$D^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$$

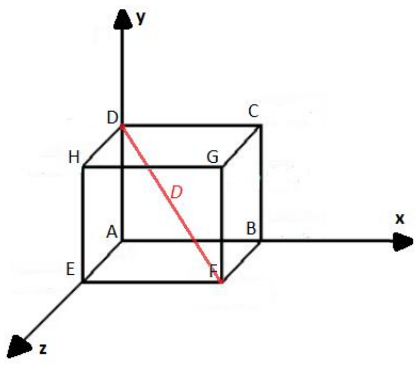
$$D^2 = a^2 + a^2\sqrt{2}^2$$

$$D^2 = a^2 + 2a^2$$

$$D^2 = 3a^2 / \sqrt{}$$

$$\sqrt{D^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2}$$

$$D = \mathrm{a}\sqrt{3}.$$



Slika 20. Prostorna dijagonala kocke

Izvor: autor

Kao primjer računanja plošne i prostorne dijagonale kocke zadat ćemo kocku kojoj duljina brida iznosi 5 cm.

Primjer 6.

Duljina plošne dijagonale kocke duljine brida 5c m iznosi:

$$d = a\sqrt{2}$$

$$d = 5\sqrt{2}$$

$$d \approx 7.07\ cm.$$

Zatim računamo duljinu prostorne dijagonale:

$$D = a\sqrt{3}$$

$$D = 5\sqrt{3}$$

$$D \approx 8.66\ cm.$$

Isto tako, dijagonalu možemo izračunati prema formuli za udaljenost točaka u prostoru.

Primjer 7.

Izračunajmo dijagonalu kocke kojoj je duljina stranice 5.

S obzirom na to da vrhovi prostorne dijagonale imaju sve koordinate različite, možemo bez smanjenja općenitosti uzeti točke D (0, 5, 0), F(5, 0, 5).

$$d(DF) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$d(DF) = \sqrt{(5-0)^2 + (0-5)^2 + (5-0)^2}$$

$$d(DF) = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2}$$

$$d(DF) = 5\sqrt{3}$$

$$d(DF) \approx 8.66$$

7. ČETVERODIMENZIONALNA KOCKA

Analogno tome kako smo trodimenzionalnu kocku stavili u koordinatni sustav, tako stavljamo i četverodimenzionalnu kocku. Točku A stavimo u ishodište koordinatnog sustava, a njoj susjedne vrhove na koordinatne osi. Tako ćemo dobiti koordinate vrhova koji se sastoje od 0 i duljine stranica. Obzirom da svaka točka ima četiri koordinate koje su ili 0 ili 1 zaključujemo da četverodimenzionalna kocka ima $2^4 = 16$ vrhova. Analogno trodimenzionalnoj kocki gdje bridovi, tj. susjedni vrhovi imaju samo jednu koordinatu različitu, zaključujemo da četverodimenzionalna kocka ima 32 brida. . Analogno trodimenzionalnoj kocki gdje strane, tj. dvodimenzionalne strane imaju vrhove kojima su dvije koordinate različite, zaključujemo da četverodimenzionalna kocka ima 24 strane. Analogno tome, trodimenzionalne strane, tj. kocke imaju vrhove kojima je samo jedna koordinata jednaka, te se stoga sastoji od 8 trodimenzionalnih kocki.

Da bismo kreirali četverodimenzionalnu kocku u koordinatnom sustavu, prvo moramo znati kako se zapravo dobivaju koordinate obične kocke. Koordinate kocke dobivaju se iz koordinata kvadrata dodavanjem nule, a zatim jedan. Za definiranje kocke potrebno nam je osam točaka.

A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), C (1, 1, 0), D (0, 1, 0),

E (0, 0, 1), F (1, 0, 1), G (1, 1, 1), H (0, 1, 1).

Zatim, četverodimenzionalni prostor uređeni je skup točaka (x, y, z, q), tako da se koordinate četverodimenzionalne kocke dobivaju iz koordinata trodimenzionalne kocke dodavanjem četvrte koordinate koja je jednaka nuli, a zatim koordinate jedan. 4D kocka mora imati 16 vrhova pa stoga dobijemo vrhove:

A (0, 0, 0, 0), B (1, 0, 0, 0), C (1, 1, 0, 0), D (0, 1, 0, 0),

E (0, 0, 1, 0), F (1, 0, 1, 0), G (1, 1, 1, 0), H (0, 1, 1, 0).

Sljedeća četiri vrha vrhovi su kocke koja je pomaknuta u četvrtu dimenziju:

K (0, 0, 0, 1), L (1, 0, 0, 1), M (1, 1, 0, 1), N (0, 1, 0, 1),

O (0, 0, 1, 1), P (1, 0, 1, 1), R (1, 1, 1, 1), S (0, 1, 1, 1).

Bridove četverodimenzionalne kocke možemo zapisati kao:

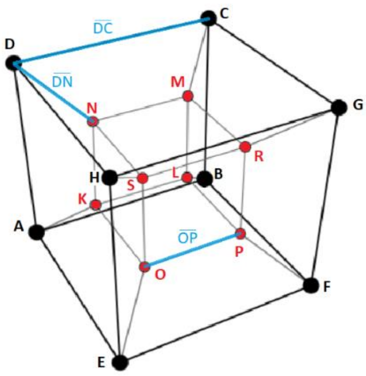
$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA},$$
$$\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HE},$$
$$\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}.$$

Sljedeći su bridovi bridovi kocke koja je pomaknuta u četvrtu dimenziju:

$$\overline{KL}, \overline{LM}, \overline{MN}, \overline{NK},$$
$$\overline{OP}, \overline{PR}, \overline{RS}, \overline{SO},$$
$$\overline{KO}, \overline{LP}, \overline{MR}, \overline{NS}.$$

Sljedećih osam bridova spaja originalnu kocku s kockom koja je pomaknuta u četvrtu dimenziju:

$$\overline{AK}, \overline{BL}, \overline{CM}, \overline{DN},$$
$$\overline{EO}, \overline{FP}, \overline{GR}, \overline{HS}.$$



Slika 21. Bridovi kocke

Izvor: autor

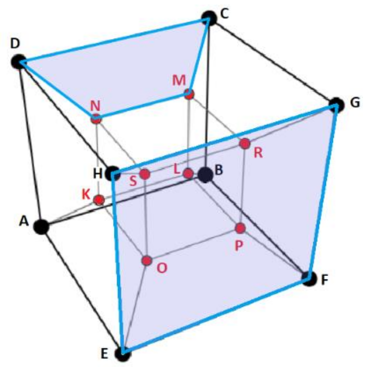
Slika prikazuje primjer bridova $\overline{DC}$, $\overline{DN}$ i $\overline{OP}$ koji su prikazani plavom bojom. Brid $\overline{DC}$ jedan je od osnovnih bridova kocke, brid $\overline{DN}$ spaja originalnu kocku s kockom koja je pomaknuta u četvrtu dimenziju, a brid $\overline{OP}$ brid je kocke pomaknute u četvrtu dimenziju.

Četverodimenzionalna kocka također sadržava 24 kvadratna lica, od kojih su 12 kvadrata izvorne kocke u dva položaja, i 12 kvadrata s 12 njezinih bridova. Lica četverodimenzionalne kocke možemo zapisati ovako:

$$ABCD, EFGH, KLMN, OPRS,$$
$$ABFE, BCGF, CGHD, DHEA,$$
$$KLPO, LMRP, NMRS, KNSO.$$

Najprije smo ispisali 12 izvornih kvadrata kocke, a zatim 12 kvadrata s njezinim bridovima koji glase ovako:

$$ABLK, BCML, CDNM, DAKN,$$
$$EFPO, FPRG, GHSR, EOSH,$$
$$AKOE, BLPF, CMRG, DNSH.$$



Slika 22. Lica EFGH i CDNM

Izvor: autor

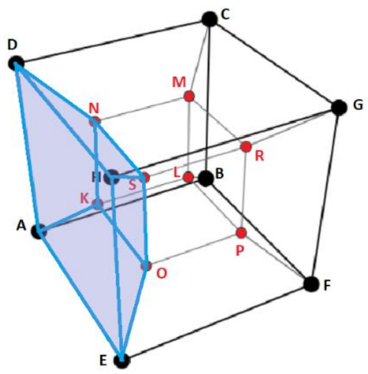
Primjer nekih od dvodimenzionalnih lica (kvadrata) četverodimenzionalne kocke prikazano je na slici iznad. Označeno lice EFGH prikazuje kvadrat izvorne kocke, a lice CDNM prikazuje kvadrat s bridovima koji spajaju izvornu kocku i kocku koja je pomaknuta u četvrtu dimenziju. Kada govorimo o trodimenzionalnim licima, to su zapravo kocke, a Teserakt sadržava osam takvih lica. Možemo ih zapisati kao:

$$ABCDEFGH, KLMNOPRS,$$

$$ABFEKLPO, BCGFLMPR,$$

$$CDHGMNSR, ADHEKNSO,$$

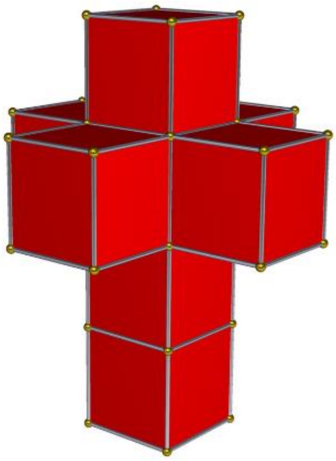
$$ABCDKLMN, EFGHOPRS.$$



Slika 23. Trodimenzionalno lice ADHEKNSO

Izvor: autor

Analogno trodimenzionalnoj kocki možemo zaključiti da susjedni vrhovi imaju tri jednake koordinate, a jednu različitu. Dvodimenzionalni vrhovi dijagonala imaju dvije jednake koordinate, a dvije različite. Trodimenzionalni vrhovi dijagonala imaju jednu koordinatu istu, a tri su različite. Na kraju, četverodimenzionalni vrhovi dijagonala imaju sve koordinate različite.



Slika 24. Mreža četverodimenzionalne kocke

Izvor: en.wikipedia.org/wiki/Tesseract (07.09.2022.)

7.1. Volumen četverodimenzionalne kocke

S obzirom na to da se kod kocke volumen, a kod kvadrata površina, izračunavaju tako da se potencira duljina stranice eksponentom broja dimenzija, na isti se način izračunava i četverodimenzionalni volumen kocke, gdje je a duljina brida.

$$V_4 = a^4 \tag{15}$$

Na primjeru četverodimenzionalne kocke kojoj duljina brida iznosi tri jedinice izračunat ćemo njezin volumen.

Primjer 6. a = 3

$$V_4 = a^4$$

$$V_4 = 3^4$$

$$V_4 = 81$$

Volumen četverodimenzionalne kocke s duljinom brida 3 iznosi 81.

7.2. Oplošje četverodimenzionalne kocke

Na prethodnim smo primjerima vidjeli da trodimenzionalnu mrežu četverodimenzionalne kocke čini osam kocki. Prema tomu, oplošje četverodimenzionalne kocke, sa stranicom duljine a, izračunava se prema formuli koja glasi :

$$O_4 = 8\,a^3. \tag{16}$$

Za računanje oplošja također ćemo upotrijebiti primjer kocke kojoj je duljina brida tri jedinice.

Primjer 7. a = 3

$$O_4 = 8a^3$$

$$O_4 = 8 \cdot 3^3$$

$$O_4 = 8 \cdot 27$$

$$O_4 = 216$$

Oplošje četverodimenzionalne kocke s duljinom brida 3 iznosi 216.

7.3. Dijagonale četverodimenzionalne kocke

Kvadrat ima dvije dijagonale. Kocka, s obzirom na to da ima šest strana, ima dvanaest plošnih ili dvodimenzionalnih dijagonala, a, s obzirom na to da ima četiri para nasuprotnih vrhova, ima četiri prostorne ili trodimenzionalne dijagonale.

Četverodimenzionalna kocka ima osam parova nasuprotnih vrhova, te ima osam prostornih dijagonala. Također, ima osam trodimenzionalnih kocki, te iz toga proizlazi da ima 32 trodimenzionalne dijagonale i 96 dvodimenzionalnih dijagonala. Formulu za duljinu četverodimenzionalne dijagonale najlakše je izvesti iz formule za udaljenost točaka. Budući da nasuprotni vrhovi imaju sve koordinate različite, možemo, bez smanjenja općenitosti, uzeti vrhove A (0, 0, 0, 0) i R (a, a, a, a).

$$d(AR) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (q_2 - q_1)^2} \quad (17)$$

$$d(AR) = \sqrt{(a - 0)^2 + (a - 0)^2 + (a - 0)^2 + (a - 0)^2}$$

$$d(AR) = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2 + a^2}$$

$$d(AR) = \sqrt{4a^2}$$

$$d(AR) = 2a$$

Primjer 8.

Zadana su točke A (0, 0, 0, 0) i točka R (1, 1, 1, 1) te računamo dijagonalu:

$$d(AR) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2}$$

$$d(AR) = \sqrt{1 + 1 + 1 + 1}$$

$$d(AR) = \sqrt{4} = 2.$$

8. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu prikazano je što su dimenzije, što je četverodimenzionalna kocka, koju možemo nazvati i Teserakt, te od čega se ona sastoji. Četverodimenzionalni prostor teško nam je zamisliti, ali on se može matematički opisati s pomoću operacija s koordinatama točaka. Kako bismo došli do četvrte dimenzije, prvo moramo ustanoviti kako funkcioniraju druge dimenzije. Točka je nulte dimenzije, pravac ima jednu dimenziju, dvodimenzionalna je ravnina i na kraju prostor koji ima tri dimenzije. S pomoću kvadrata kojem su koordinate uređeni skup točaka x, y u koordinatnom sustavu, dobili smo kocku tako da smo dodali treću koordinatu z. Koordinate kocke su tada uređeni skup točaka x, y, z. Na isti način, iz koordinata kocke, dobivamo četverodimenzionalnu kocku kojoj su tada koordinate uređeni skup točaka x, y, z, q. Definiranjem četverodimenzionalne kocke došli smo do zaključka da se sastoji se od 16 vrhova, 32 brida, 24 dvodimenzionalna lica (kvadrata) i 8 trodimenzionalnih lica (kocki). Četverodimenzionalnu kocku nama je teško predočiti, ali spomoću drugih dimenzija može se vrlo lako objasniti.

9. LITERATURA

[1] „Što je Tesseract? Cybercube – prvi korak u četvrtu dimenziju” https://m-eng.ru/hr/cleaning/chto-takoe-tesserakt-kiberkub---pervyi-shag-v-chetvertoe-izmerenie.html (19.04.2022.)

[2] „Koordinatni sustav” Hrvatska enciklopedija https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=33043 (16.07.2022.)

[3] „Dimenzija” Hrvatska enciklopedija https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=15187 (16.07.2022)

[4] Elezović N. Linearna algebra, Zagreb: Element; 2006.

[5] „Koordinatizacija pravca” Matematika1 http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node53.html (04.09.2022.)

[6] „Koordinatizacija ravnine” Matematika1 http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node54.html (04.09.2022.)

[7] „Koordinatizacija prostora” Matematika1 http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node55.html (04.09.2022.)

[8] Gusić I. MATEMATIČKI RJEČNIK/ Ivica Gusić – Zagreb: Element; 1995.